Das 14-teilige Wortrechnungsrätsel des Regensburger Rechenmeisters Georg Wendler von 1667

Von Alfred Holl und Yvonne Stry

1. Einführung

Buchstabenzahlenrätsel (damals *Wortrechnung* genannt) erfreuten sich im 16. und 17. Jh. einer erstaunlichen Beliebtheit. Es scheint ebenso reizvoll gewesen zu sein, sie auszudenken, wie sie zu lösen. Rechenmeister präsentierten sie in ihren Rechenbüchern an exponierter Stelle, natürlich ohne *Facit*, also ohne die Lösung anzugeben. Zielgruppe waren nicht nur Rechenschüler, die ihre Fähigkeiten daran messen konnten – dafür sind manche Rätsel zu schwierig –, sondern auch und gerade Rechenmeisterkollegen, die sich diesen ‚Herausforderungen' gerne stellten. Es gibt sogar einzelne Werke, die sich ausschließlich mit ungelösten Aufgaben anderer Rechenmeister beschäftigen, so etwa die *Resolutio* des Nürnberger Rechenmeisters Sebastian Kurz (1576–1659). Wortrechnungsrätsel finden aber auch das Interesse der heutigen Mathematikgeschichte.[1]

Als Lösungen erhält man deutsche oder lateinische Sinnsprüche oder Namen von Heiligen als Repräsentanten für das Datum ihres jeweiligen Festes. Buchstabenzahlenrätsel basieren auf der aufsteigenden Zahlcodierung des Alphabets von 1 bis 24 (*I*, *J* und *U*, *V* werden entsprechend dem Lateinischen jeweils nur einmal gezählt). Die konkreten Zahlenwerte werden oft unter Verwendung heute nicht mehr gebräuchlicher mathematischer Definitionen ermittelt und dann durch die entsprechenden Buchstaben für bestimmte Positionen in einem Wort ersetzt.

Der Schwierigkeitsgrad von Wortrechnungsrätseln reicht bis hin zum 10-seitigen Rätsel des Regensburger Rechenmeisters Georg Wendler (Burglengenfeld 1619–1688 Regensburg), bestehend aus 14 Teilaufgaben (am Schluss der *Arithmetica practica*, U5^{v}–X2^{r}), die in diesem Beitrag besprochen werden. Eine zeitgenössische Lösung ist – bis auf die wenigen u.g. und für die Bearbeitung sehr hilfreichen Teillösungen in Wendlers Handschrift *Analysis vel resolutio* – nicht bekannt.

Der mathematische Wortschatz des 17. Jahrhunderts unterschied sich teilweise stark von dem heutigen, so dass hier zum besseren Textverständnis die wichtigsten ungewohnten Ausdrücke des Rätsels vorausgeschickt seien:

aggregat: Summe	*diameter*: Kreisdurchmesser, Quadratseite
augieren: multiplizieren, potenzieren	*factum*: Ergebnis, Produkt, Summe
collect: Summe	*quotus*: Ergebnis, Quotient
colligieren: konstruieren (arithmetisch)	*radix*: Wurzel
componieren: konstruieren (arithmetisch)	*residuum, restant, Rest*: Differenz

[1] Vgl. GEBHARDT, Rechenbuch; HALLER, Neudörffers Rätsel; HALLER – HOLL, Zwei Rätsel; STRY, Kandlers Zahlenrätsel.

continenz: Volumen
continua proportio: geometrische Folge
Coss: Algebra
defalciren: abziehen
unitet: Einheit, Zahl 1
unterscheid: Differenz
vermehren in (einander): multiplizieren mit (sich selbst)

2. Wendlers Rätsel

Das Rätsel beginnt mit einem Ausblick auf seine Lösung, nämlich einen Wunsch – für den Regensburger Rat –, der in Bezug zu der kreisförmigen Skizze am Ende stehen soll, sowie mit einem Verweis auf die Zahlcodierung des Alphabets.

Zum Beschluß wird Einem Wol-Edlen und Hochweisen Rath alhier/ ein schöner Wunsch von etlichen Worten gewünschet/ wie aus hernach zuletzt gesetzter Circularischer Figur ist zuersehen/ welchen ich denen Cossisten/ auch denen Arithmeticis, Geometri: und Stereometristen/ will durch verborgene reden anzeigen. Wer nun solchen Wunsch begehrt zuwissen/ der wolle unbeschwert das Teutsche Alphabet mit Zahlen bezeichnen/ Nemlich: A. 1. und Z. mit 24. und hernach folgenden Bericht lesen.

Danach folgen die 14 Teilaufgaben. Die Teilaufgaben 5, 6, 7 und 9 sind für heutige Mathematiker leicht zu lösen. Auch die geometrischen Teilaufgaben 2, 8 und 10 sind durch die Abbildungen, die genaue Beschreibung und die Verwendung einfacher mathematischer Sätze (Pythagoras) nicht aufwändig, allerdings gibt die Fassmessung in Aufgabe 2 Probleme auf. Bei den figurierten Zahlen (Teilaufgaben 4, 11, 12 und 13) sind Spezialkenntnisse nötig, die im heutigen Mathematikunterricht oder im Mathematikstudium nicht unbedingt vermittelt werden. Die Teilaufgaben 1, 3 und 14 sind eher schwer vom Text in mathematische Formeln zu übersetzen, bei Teilaufgabe 14 bedarf es zudem eines besonderen Vorwissens.

Die Lösungsbuchstaben aus den leichteren Teilaufgaben ergeben schon einen großen Teil des Lösungsspruches, so dass man ihn ganz erraten kann und für die restlichen Teilaufgaben die Lösungen kennt und damit auch die Möglichkeit hat, zurückzurechnen und Druckfehler in Wendlers Text zu bereinigen. Das Original ist jeweils kursiv gesetzt, Konjekturen und Erläuterungen recte.

Teilaufgabe 1

1. Hat man 3 QuadratZahlen/ deren Wurtzel eine die ander um eines übertrifft/ wann man die in einander vermehret/ und vom product 120 defalcirt, bleiben 216. Diser [sc. *unterscheid*] *und der 3 QuadratZahlen unterscheid von einer andern QuadratZahl* + <*16*> [186] *welcher QuadratZahl 1/4 – 1 Subtrahirt/ abermal eine QuadratZahl bringt/ dessen und vorhergehender Quadratradix unterscheid um 1 mehr ist/ abgezogen/ der Rest + 1 weist den allerersten Buchstaben des Wunsches.*

Die zunächst angesprochenen drei aufeinander folgenden Quadratzahlen sind leicht zu finden; es handelt sich um 6^2, $(6 + 1)^2$ und $(6 + 2)^2$, da

$$6 \cdot 7 \cdot 8 - 120 = 216.$$

Nun ist eine *andere* Quadratzahl gesucht, x^2; die *abermalige* Quadratzahl (von der der Text spricht) ist dann $(x - 1)^2$, weil die Differenz von deren Wurzeln 1 betragen soll. Die Bestimmungsgleichung für x lautet

$$x^2 - (1/4\, x^2 - 1) = (x - 1)^2. \qquad (1.1)$$

Die Lösung von (1.1) ist neben der Null die Zahl $x = 8$. Um den Lösungsbuchstaben zu erhalten, ist nun

$$8^2 + 186 - 216 - (8^2 - 6^2) + 1 = 7 \qquad \text{(Buchstabe } \mathbf{G}\text{)}$$

zu berechnen; dabei ist *der 3 QuadratZahlen unterscheid* $(8^2 - 6^2)$, und es wurde + 186 für + 16 verbessert.

Teilaufgabe 2

2. Ist ein Vaß Visiert und gemessen worden/
welches zweymal so lang als tief ist/ dessen
Inhalt 5 Eymer/ und auf der 7 Läng der
Ruthen 35 Seidl sich befunden haben. So
man zu der gantzen Läng des Vaß 1151 5/7
addirt/ oder solche Läng des Vaß mit 15 129/256 vermeh-
ret/ kommen 2 Zahlen/ aus denen man einen
Triangulum Orthogonium DFG vor-
gibt/ und zur Linea FG Secans die grössere
Zahl mit dem Zeichen √ setzet/ zur Area aber
die kleiner Zahl/ aus welchem Triangulo
wird zu suchen begert Sinus Totus DF oder
Linea Horizontalis, und Cathetus DG
oder Linea Tangens. Wann nun die ge-
fundene Linea Horizontalis DF wird
durch 3 getheilet/ und vom quoto 2 abgezo-
gen/ weist der Rest den 1ten des 1ten/ letzten
des 6ten/ 1ten des 10ten/ 3ten und letzten
des 17ten/ auch letzten des 22ten worts.
Linea Tangens oder Cathetus DG aber
zeigt den 3ten des 2ten/ 1ten des 12ten/ 5ten
des 14ten/ 1ten des 19ten/ und 1ten des
28ten worts.

Der erste Satz bezieht sich auf die „Visierung“ eines Fasses, d. h. auf die Näherungsmessung des Volumens mit Hilfe einer Visierrute. Wir gehen von einer kubischen Rute aus, die für eine bestimmte Fassform anhand eines bekannten Fasses geeicht war (hier die Angabe *auf der 7 Läng der Ruthen 35 Seidl*). Zur Messung führte man die Rute durch das Spundloch in der Mitte eines liegenden Fasses schräg bis zum Knick zwischen Boden und Dauben ein und las die Länge am Spundloch ab. Bei zwei verschiedenen Fässern verhalten sich dann die Volumina trivialerweise wie die dritten Potenzen der Rutenlängen.[2]

[2] Vgl. FOLKERTS, Visierkunst.

Für Volumina gilt die Umrechnung 1 Eimer = 64 Köpf = 128 Seidel.

Mit den Angaben der Aufgabenstellung (incl. Wendlers Darstellung von Visierruten in seinem *Memorialbuch*, 281^{r}–342^{v}) kommt man allerdings nicht zu einem geeigneten Wert für die gesuchte Länge *l*, so dass man ihn aus der Lösung zurückrechnen und dann Konjekturen annehmen muss. Wir stellen zwei Lösungsalternativen vor.

Die erste Lösungsalternative haben wir selbst entwickelt.

Konjekturen: *dessen Inhalt* <5> [15] *Eymer*; *auf der 7 Läng der Ruthen* <35> [305] *Seidl.*

Man bestimmt zuerst die dem Fass entsprechende Rutenlänge *a*. Das Fass hat das Volumen 15 Eimer = 1920 Seidel. Da sich Volumina wie die dritten Potenzen der Rutenlängen verhalten, gilt:

$$1920 : 305 = (a : 7)^3$$

$$a = 28 \cdot \sqrt[3]{6/61}$$

Damit berechnet man die Länge des Fasses. Die Ausdrücke *Länge* und *Tiefe* beschreiben ein Fass im Liegen. Die Länge ist der Abstand von Boden bis Deckel. Die durchschnittliche Tiefe eines naturgemäß bauchigen Fasses wird als arithmetisches Mittel des (kleinsten) Durchmessers am Boden (bzw. Deckel) und des (größten) Durchmessers am Spundloch angenähert. In diesem Sinn soll das Fass doppelt so lang wie tief sein.

Tiefe und halbe Länge $l/2$ als Katheten und die Rutenlänge *a* als Hypotenuse bilden somit ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck. Nach Pythagoras gilt:

$$(l/2)^2 + (l/2)^2 = a^2$$

$$l = a \cdot \sqrt{2} = 28 \cdot \sqrt[3]{6/61} \cdot \sqrt{2} \approx 18\ 2/7$$

Die Abweichung von 7/1000 liegt im Bereich üblicher Rechenungenauigkeit.

Die zweite Lösungsalternative verdanken wir Herrn Martin Hellmann.

Man geht von einer Visierrute aus, die kubisch beschriftet ist, d.h. statt der 2 der – in der ersten Lösungsalternative zugrunde gelegten – linearen Beschriftung steht $2^3 = 8$, statt 3 steht $3^3 = 27$, statt 4 steht $4^3 = 64$ usw.

Konjektur: *auf der* <7> [1] *Läng der Ruthen 35 Seidl.*

Zusätzlich ist noch eine besondere Interpretation des Wortes *Länge* anzunehmen: Man versteht den Ausdruck *gantze Läng des Vaß* in diesem Fall nicht als Länge des Fasses selbst (wie in der ersten Lösungsalternative), sondern als „Anzahl der kubischen Rutenlängeneinheiten, die dem Fass entspricht“. Die Angabe zum Längen-Tiefen-Verhältnis des Fasses ist dann irrelevant, man braucht nur sein Volumen 5 Eimer = 640 Seidel. Bei zwei verschiedenen Fässern verhalten sich die Volumina wie die kubischen Rutenlängeneinheiten, d.h., es ist nur der Dreisatz anzuwenden:

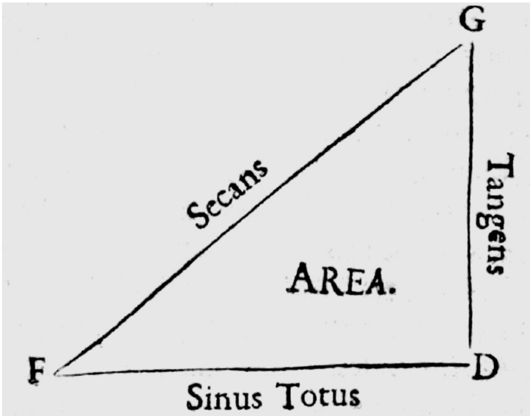
$$640 : 35 = l : 1$$

Beide Lösungsalternativen führen zum gleichen Wert 18 2/7 für die Länge *l*.

Mit Hilfe dieser Länge erhält man nun zwei Zahlen

$$l + 1151\ 5/7 = 1170 \quad \text{und} \quad l \cdot 15\ 129/256 = 567/2.$$

Abb. 1: Zu Teilaufgabe 2
(WENDLER, Arithmetica, U6v)



Die Wurzel aus der größeren Zahl ergibt die Länge der Seite *FG* (s. Abb. 1)

$$FG = \sqrt{1170},$$

die kleinere Zahl den Flächeninhalt *A* des Dreiecks *DFG*

$$A = 567/2\ .$$

Damit (und aus der textlichen und graphischen Information, dass es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt) lassen sich die Längen der Seiten *DF* und *DG* berechnen, über die Flächenformel

$$1/2\ DF \cdot DG = A = 567/2 \qquad (2.1)$$

und über den Satz von Pythagoras

$$DF^2 + DG^2 = FG^2 = 1170. \qquad (2.2)$$

Auflösen von (2.1) nach einer der Unbekannten und Einsetzen in (2.2) liefert (da nach der Graphik $DF > DG$ sein soll)

$$DF = 27, \quad DG = 21.$$

Die gesuchten Buchstaben erhält man nun über

$$DF/3 - 2 = 7 \qquad \text{(Buchstabe } \mathbf{G}\text{)}$$

und

$$DG = 21 \qquad \text{(Buchstabe } \mathbf{W}\text{)},$$

die an den angegebenen Stellen des Buchstabenzahlenrätsels einzusetzen sind.

Für Dreiecksseiten, -fläche und -art werden in Wendlers Text nicht nur die eindeutigen Abkürzungen (z. B. *DF*) verwendet, sondern auch die entsprechenden lateinischen Bezeichnungen. Für die Seiten werden die an den Winkelfunktionen orientierten verwendet: Mit *DF* = *Sinus totus* (Maximalwert für den Sinus, also Kreisradius) ist

$$FG = \mathit{Secans} = DF \sec(\sphericalangle DFG) \text{ und } DG = \mathit{Tangens} = DF \tan(\sphericalangle DFG).$$

Teilaufgabe 3

3. Ist eine Zahl in 6 Theil zu theilen/ welcher Theil allwegen 2 und 2 ein gleiches factum bringen/ und ihre aggregat 64, 71 und 89 machen. Wann iedes product wird Csursolidae augirt, auch der 3en aggregat duplat, und iedes aggregatQuadrat addirt/ erscheinen 2626924827862160325696805914297442. welches werden die 6 Theil seyn? wovon 188 abgezogen/ bringt derselben Rest eine QuadratZahl/ deren Wurtzel + 17 weisen den 2ten Buchstaben des letzten worts. Und welche 2 Theil gehören zusammen? deren 3ter und 4ter Theil auch eine Quadrat Zahl bringen/ deren QuadratWurtzel – 6 zeigt den 1ten des 2ten/ und 1ten des 23ten worts. 284 durch den 2ten und 5ten Theil getheilt/ weist der quotient den letzten des 5ten/ letzten des 9ten/ letzten des 10ten/ 2ten des 13ten/ 1ten des 18ten/ 1ten des 24ten/ 1ten des 25ten/ 1ten des 26ten/ und letzten des 28ten worts. Von dem 1ten und letzten Theil aber 86 abgezogen/ zeigt der Rest den 6ten des 7ten/ 5ten des 8ten/ und 3ten des 14ten worts.

Eine gesuchte Zahl x ist Summe von sechs Summanden a, b, c, d, e und f

$$x = a + b + c + d + e + f. \qquad (3.1)$$

Das Produkt jeweils zweier dieser Summanden ist identisch

$$a \cdot b = c \cdot d = e \cdot f, \qquad (3.2)$$

und die Summe der jeweiligen beiden Zahlen aus (3.2) ist gegeben mit

$$a + b = 64, \quad c + d = 71, \quad e + f = 89. \qquad (3.3)$$

Eine erste Schlussfolgerung aus (3.3) ist, dass für die gesuchte Zahl x aus (3.1) gilt

$$x = 64 + 71 + 89 = 224. \qquad (3.4)$$

Im Folgenden geht es um 11. Potenzen von (3.2) (*Csursolidum*[3]), die Summen aus (3.3) werden mit 2 multipliziert, die Quadrate dieser Summen werden außerdem addiert, insgesamt

$$(ab)^{11} + (cd)^{11} + (ef)^{11} + 2\cdot((a+b) + (c+d) + (e+f)) + (a+b)^2 + (c+d)^2 + (e+f)^2$$
$$= 2\,626\,924\,827\,862\,160\,325\,696\,805\,914\,297\,442.$$

[3] Als *sursolida* wurden prime Exponenten bezeichnet: *(A)sursolidum* 5, *Bsursolidum* 7, *Csursolidum* 11, *Dsursolidum* 13 etc.

Durch Einsetzen von (3.2) und (3.3) erhält man daraus eine Gleichung für *ab* mit der Lösung

$$ab = 988\ (= cd = ef).$$

Nun können mit Hilfe von (3.3) auch die einzelnen Summanden *a*, *b*, *c*, *d*, *e* und *f* berechnet werden:

$$ab = a\,(64 - a) = 988,\quad cd = c\,(71 - c) = 988,\quad ef = e\,(89 - e) = 988.$$

Die Lösungen dieser drei quadratischen Gleichungen sind

$$a = 38,\ b = 26,\ c = 52,\ d = 19,\ e = 76,\ f = 13$$

bzw. jeweils umgekehrt. Jetzt werden diese Lösungen der Größe nach (aufsteigend) geordnet

$$x_1 = 13,\ x_2 = 19,\ x_3 = 26,\ x_4 = 38,\ x_5 = 52,\ x_6 = 76.$$

Weiter wird im Folgenden die Zahl $x = 224$ aus (3.4) verwendet. Die gesuchten Buchstaben des Wortrechnungsrätsels erhält man dann aus

$$\sqrt{x - 188} + 17 = 23 \qquad \text{(Buchstabe } \mathbf{Y}\text{)}$$

$$\sqrt{x_3 + x_4} - 6 = 2 \qquad \text{(Buchstabe } \mathbf{B}\text{)}$$

$$284/(x_2 + x_5) = 4 \qquad \text{(Buchstabe } \mathbf{D}\text{)}$$

$$x_1 + x_6 - 86 = 3 \qquad \text{(Buchstabe } \mathbf{C}\text{).}$$

Diese Buchstaben sind wiederum an den angegebenen Stellen im Rätsel einzusetzen.

Teilaufgabe 4

4. Seyn etliche Pyramidal-Zahlen von Hexa-
decagonalien calculirt, die thun 1848. de-
ren radic<i>[e]*s progression<e>*[i]*s Hexadecagona-*
l<e>[i]*s + <11>* [1124] *von denenselben abgezogen/ und*
den Rest durch 58 getheilt/ weist der quotus
den 4ten des 25ten/ den 2ten des 27ten und
3ten des letzten worts.

Die 4. Teilaufgabe bezieht sich auf so genannte figurierte Zahlen, die in frühen mathematischen Enzyklopädien[4] sowie der mathematikhistorischen Literatur[5] reichlich diskutiert wurden und sogar in Wikipedia Einzug gefunden haben. Eine figurierte Zahl kann interpretiert werden entweder als Teilsumme einer Folge oder geometrisch als Anzahl Steine, die für eine speziell definierte geometrische Figur benötigt werden.[6]

[4] Z.B. Hemeling, Rechenmeister, S. 1004–1029.

[5] Z.B. Haller, Neudörffers Rätsel; Holl, Polygonalzahlen; Schneider, Faulhaber, S. 72–80 mit Abb., S. 109–122; Tropfke, Geschichte VI, S. 7–9 und 21–23.

[6] Die folgende Darstellung orientiert sich (teilweise wörtlich) an Haller – Holl – Stry – Groß, Anton Neudörffer I, S. 310–319.

Unter die figurierten Zahlen fallen als einfachste Form die (dezentralen, d.h. eine Ecke bleibt fest) Polygonalzahlen (Vieleckzahlen, k-Eck-Zahlen). Sie sind über die Anzahl k der Ecken eines k-Ecks definiert. k-Pyramidalzahlen hingegen erhält man, indem man durch Übereinanderlegen immer kleiner werdender k-Ecke räumliche Pyramiden konstruiert. Hier liegen also Summen von Polygonalzahlen vor.

Mathematisch gesehen handelt es sich bei k-Eck-Zahlen um Summenwerte von mit 1 beginnenden endlichen arithmetischen Reihen. Geometrisch gesprochen zählt man die Steine, mit denen sich ineinander verschachtelte k-Ecke legen lassen. Die k-Ecke brauchen keine besonderen Eigenschaften aufzuweisen. Dementsprechend gibt es unterschiedliche Veranschaulichungen. In einer Variante haben die k-Ecke die Form eines Fächers aus $(k - 2)$ gleichschenkligen Dreiecken (s. Abb. 2; dort nicht genau gleichschenklig gezeichnet). Der Fußpunkt des Fächers ist die erste Ecke; diese bleibt fest. Die anderen $(k - 1)$ Ecken liegen außen am Fächerrand und werden von den $(k - 2)$ Basen der gleichschenkligen Dreiecke gebildet. Bei Schachtelung der k-Ecke wird der Fußpunkt des Fächers beibehalten und nur ein weiter außen liegender, neuer Fächerrand durch Legen zusätzlicher Steine erzeugt. Dabei bekommt der neue Fächerrand $(k - 2)$ Steine (einen pro Seite) mehr als der alte.

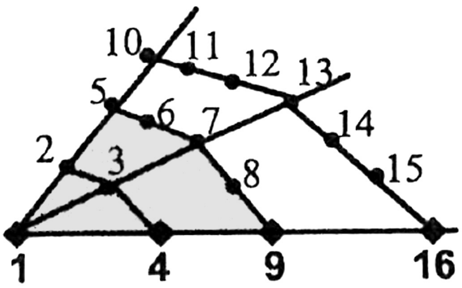


Abb. 2: Die Viereckszahlen 1, 4, 9, 16 für $n = 1, 2, 3, 4$ (HALLER, Neudörffers Rätsel, S. 267)

Die Anzahl der Steine am n-ten Fächerrand eines k-Ecks bildet also eine arithmetische Folge $a_{k,n}$ mit $a_{k,1} := 1$ und der Schrittweite $(k - 2)$:

$$a_{k,n} = 1 + (k - 2)\,(n - 1) \quad \text{mit } n = 1, \dots \ . \qquad (4.1)$$

Die Anzahl $z_{k,n}$ der jeweils für die gesamte Figur benutzten Steine heißt n-te k-Eck-Zahl, wobei n die Anzahl der Steine auf einer Seite („Seitenlänge") des entsprechenden k-Ecks ist und Ordnung („Wurzel") einer k-Eck-Zahl genannt wird. Die $z_{k,n}$ erhält man als Teilsummen der arithmetischen Folge $a_{k,n}$ (man summiert die Anzahlen der Steine aller Fächerränder):

$$z_{k,n} = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} = \left(a_{k,1} + a_{k,n}\right) \cdot \frac{n}{2} = \frac{n\big((k-2)n - (k-4)\big)}{2} \qquad (4.2)$$

Als Beispiel betrachten wir die im Text angesprochenen Hexadekagonalzahlen, also 16-Eck-Zahlen, die beim Konstruieren von 16-Ecken (oder Pyramiden mit einer 16-eckigen Grundfläche) auftreten. Fügt man zu einem Stein ($a_{16,1} = 1$) weitere $a_{16,2} = 15$ Steine hinzu, so erhält man (unter Mitbenutzung des ersten Steins) ein 16-Eck; bei weiteren $a_{16,3} = 29$ Steinen (unter Mitbenutzung von 3 Steinen aus dem vorigen 16-Eck) das nächst größere 16-Eck usw. Allgemein erhält man bei weiteren

$a_{16,n}$ Steinen auf dem Fächerrand (unter Mitbenutzung von $2n - 3$ Steinen aus dem $(n - 1)$-ten 16-Eck, die nach obiger Veranschaulichung genau dessen zwei äußere „Fächerschenkel" bilden) das nächst größere, n-te 16-Eck.

Die Ordnungen n werden im Aufgabentext als „Wurzeln" (*radices*) der 16-Eck-Zahl-Folge (*progressionis Hexadecagonalis*) bezeichnet.

Die Zahlen $a_{16,n}$ bilden gemäß (4.1) eine arithmetische Folge

$$a_{16,n} = 1 + (16 - 2)\,(n - 1) \quad \text{mit } n = 1, \ldots \,.$$

Die Anzahl der jeweils benutzten Steine heißt 16-Eck-Zahl $z_{16,n}$; man erhält diese Zahlen (wie in (4.2)) als Teilsummen der arithmetischen Folge $a_{16,n}$ zu

$$z_{16,n} = \sum_{j=1}^{n} a_{16,j} = n(7n - 6)$$

Entsprechend kann man Teilsummen der $z_{16,n}$ bilden und erhält die hexadekagonalen Pyramidalzahlen, kurz 16-Pyramidalzahlen

$$p_{16,n} = \sum_{j=1}^{n} z_{16,j}$$

Die folgende Tabelle, die sich wie die beiden weiteren (in Teilaufgabe 11 und 12) mit bspw. Excel leicht erzeugen lässt, gibt diese 16-Eck-Zahlen und die zugehörigen 16-Pyramidalzahlen bis $n = 7$ wieder.

Ordnung n	Den 16-Eck-Zahlen zugrunde liegende Folge $a_{16,n}$	16-Eck-Zahl $z_{16,n}$	16-Pyramidalzahl $p_{16,n}$
1	1	$z_{16,1} = 1$	$p_{16,1} = 1$
2	15	$z_{16,2} = 16$	$p_{16,2} = 17$
3	29	$z_{16,3} = 45$	$p_{16,3} = 62$
4	43	$z_{16,4} = 88$	$p_{16,4} = 150$
5	57	$z_{16,5} = 145$	$p_{16,5} = 295$
6	71	$z_{16,6} = 216$	$p_{16,6} = 511$
7	85	$z_{16,7} = 301$	$p_{16,7} = 812$
$\sum_{j=1}^{7} j = 28$			$\sum_{j=1}^{7} p_{16,j} = 1848$

Bereinigt man den Druckfehler in der Aufgabenstellung (lies +*1124* statt +*11*), so erhält man die gesuchte Zahl über

$$\left(\sum_{j=1}^{7} p_{16,j} - \left(\left(\sum_{j=1}^{7} j\right) + 1124\right)\right)/58 = 696/58 = 12,$$

welches dem Buchstaben **M** entspricht.

Teilaufgabe 5

5. Wenn du die Zahl des 2ten Buchstaben 4ten worts/ zu der Zahl des letzten worts 1ten Buchstaben Summirst/ und das Collect mit beeder Zahlen differenz vermehrest/ kommen 203. So du aber derselben zweyen Zahlen Quadrat vermehrest in ihre eigene differenz/ erscheinen 90335. Die kleiner Zahl weist den 2ten und 3ten des 4ten/ 4ten des 6ten/ 4ten des 7ten/ 3ten des 12ten/ 3ten des 13ten/ den 1 des 22ten/ und 3ten des 27ten worts. Die grösser Zahl zeigt den 1ten des 5ten/ 1ten des 6ten/ 4ten des 8ten/ 2ten des 10ten/ 8ten des 14ten/ 6ten des 17ten/ 1ten des 20ten 1ten des 21ten/ letzten des 23/ letzten des 26ten/ letzten des 27ten/ 1ten des 29ten/ und 1ten des letzten worts.

Gesucht sind zwei Zahlen x und y ($x > y$), die

$$(x + y)\ (x - y) = 203 \qquad (5.1)$$

und

$$(x^2 + y^2)\ (x^2 - y^2) = 90335 \qquad (5.2)$$

erfüllen. Da ganzzahlige Lösungen zwischen 1 und 24 zu suchen sind und die Primzahlzerlegung von

$$203 = 29 \cdot 7$$

lautet, genügt schon (5.1), um die Lösung

$$x = 18,\ y = 11,$$

also die Buchstaben **S** und **L**, zu erhalten. (5.2) enthält keine neue Information, sondern bestätigt die Lösung.

Teilaufgabe 6

6. So du aber die Zahl des letzten Buchstaben 2ten worts/ mit der Zahl des 6ten worts 5ten Buchstaben vermehrest/ und der zwo Zahlen Collect von dem facto abziehest/ weist das Residuum 127. Da du aber solche zwo Zahlen zum aggregat ihrer QuadratZahlen addirst/ kommen 396. Die grösser Zahl weist den *letzten des 2ten/ letzten des 4ten/ 2ten des 7ten/ 2ten des 8ten/ 1ten des 15ten/ 1ten und 9ten des 17ten/ letzten des 18ten/ 3ten des 19ten/ letzten des 24ten/ letzten des 25ten/ 3ten des 28ten/ und letzten des letzten worts. Die kleiner Zahl weist den 5ten des 6ten/ 5ten des 7ten/ 3ten des 8ten/ 2ten des 11ten/ 7ten des 14ten/ 1ten des 16ten/ mittlern des 23ten/ 2ten des 25ten/ 2ten des 28ten/ und 3ten des 29ten worts.*

Gesucht sind zwei Zahlen x und y, die

$$x \cdot y - (x + y) = 127 \qquad (6.1)$$

und

$$(x^2 + y^2) + (x + y) = 396 \qquad (6.2)$$

erfüllen. Durch die Linearkombination (6.2) + 2·(6.1) erhält man eine quadratische Gleichung für $x + y$

$$(x + y)^2 - (x + y) = 396 + 2 \cdot 127 = 650,$$

deren positive Lösung

$$x + y = 26 \qquad (6.3)$$

ist. Wegen (6.3) kann man $y = 26 - x$ in (6.1) einsetzen und erhält

$$x \cdot (26 - x) - 26 = 127$$

mit den Lösungen

$$x_{1/2} = 13 +/- 4.$$

Symmetrisch dazu erhält man mit (6.3)

$$y_{1/2} = 13 -/+ 4.$$

Die gesuchten Buchstaben sind also **I** (9 = 13 – 4) und **R** (17 = 13 + 4).

Teilaufgabe 7

7. Ist des andern und vierdten Buchstaben Zahl des Fünfften worts/ ihre differenz 6. Wann man die multiplicirt/ in die differenz ihrer Cubic-Zahl/ kommen 27972. Die kleiner Zahl eröffnet den 4ten des 5ten/ den 2ten des 9ten/ 4ten des 10ten/ 3ten und 5ten des 11ten/ letzten des 13ten/ letzten des 14ten/ 2ten des 16ten/ 5ten des 17ten/ letzten des 19ten/ 3ten des 22ten/ und letzten des 29ten worts. Die grösser Zahl bringt den 3ten und letzten des 1ten/ 2ten des 5ten/ 3ten des 15ten/ 4ten des 19ten/ den 2ten/ 4ten und letzten des 20ten/ 6ten des 25ten/ und 5ten des letzten worts.

Gesucht sind zwei Zahlen mit der Differenz 6, also x und $x - 6$.

Die Bestimmungsgleichung für x lautet

$$6 \cdot (x^3 - (x - 6)^3) = 27972.$$

Aus den Binomischen Formeln (Pascalsches Dreieck) erhält man

$$(x^3 - (x^3 - 18\,x^2 + 108\,x - 216)) = 27972/6 = 4662$$

bzw. die quadratische Gleichung

$$x^2 - 6\,x - 247 = 0$$

mit den Lösungen

$$x_{1/2} = 3 +/- 16.$$

Die positive Lösung $x = 19$ ergibt den gesuchten Buchstaben **T**; und die Differenz $x - 6 = 13$ führt auf den weiteren Buchstaben **N**.

Teilaufgabe 8

8. Wird mit HIK abermal ein Triangulus bezeichnet/ dessen Perpendicular KL auf die Linea Horizontalis HI thut fallen/ welche dieselbe in zween ungleiche Theil theilet/ deren ieder ist ein Numerus quadratus, die zusammen machen 400. IK Hypotenusa, und HK Secans 560. Wann man des grössern Quadrats Diameter mit des kleinern Quadrats Diagonalien vermehret/ und vom product IH. IK. HK. und KL. mehr 72552. abziehet/ und den kleinern Theil durch den Rest theilet/ erweiset sich der 1te des 7ten/ und 1te des 8ten worts.

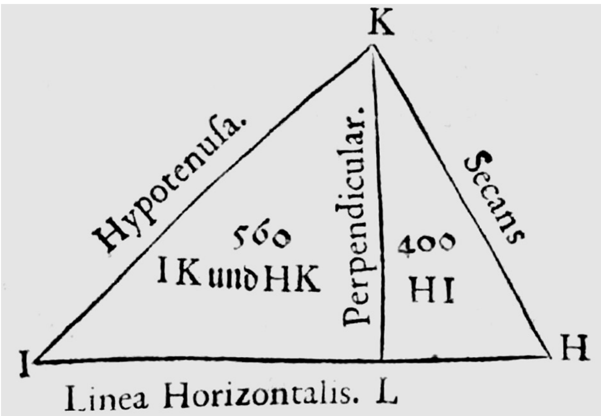


Abb. 3: Zu Teilaufgabe 8 (Wendler, Arithmetica, U8^{v})

Wie in der 2. Teilaufgabe geht es um rechtwinklige Dreiecke (s. Abb. 3). Dass nicht nur die beiden kleinen Dreiecke *ILK* und *LHK*, sondern auch das große Dreieck *HIK* rechtwinklig ist (wie in der Graphik angedeutet), steht allerdings nicht in der Aufgabenstellung, sondern ergibt sich erst aus der Rechnung. Mit deren Ergebnissen sieht man auch, dass die Seitenlängen der drei rechtwinkligen Dreiecke von

Georg Wendler durch Vervielfachung des ersten pythagoreischen Zahlentripels 3, 4, 5 konstruiert wurden.

Zunächst ist die Länge der Hypotenuse *IH* des großen Dreiecks als Summe von zwei Quadratzahlen zu schreiben

$$400 = IH = IL + LH = 256 + 144 = 16^2 + 12^2, \quad (8.1)$$

wodurch man die Längen der Teilstrecken *IL* und *LH* erhält zu

$$IL = 256,\ LH = 144. \quad (8.2)$$

Die zweite Angabe der Aufgabenstellung ist

$$IK + HK = 560. \quad (8.3)$$

Die Längen der Seiten *IK*, *KL* und *HK* lassen sich dann über den Satz von Pythagoras für die beiden kleinen Dreiecke (*ILK* und *LHK*)

$$IL^2 + KL^2 = IK^2, \quad LH^2 + KL^2 = HK^2$$

unter Benutzung von (8.2) und (8.3) berechnen zu

$$IK = 320,\ KL = 192,\ HK = 240.$$

Die beiden Quadratzahlen aus (8.1) sind jetzt geometrisch als Quadrate zu verstehen. Das größere Quadrat (mit der Fläche 256) besitzt z w e i (gleich lange, aufeinander senkrecht stehende) Quadratseiten (*Diameter* „Durchmesser") von je 16, das kleinere Quadrat (mit der Fläche 144) hat z w e i (gleich lange) Diagonalen von je $12 \cdot \sqrt{2}$; das Produkt dieser vier Werte bildet den Minuend der folgenden Differenz

$$16^2 \cdot (12\sqrt{2})^2 - (IH + IK + HK + KL + 72552) = 73728 - 73704 = 24. \quad (8.4)$$

Der *kleinere Theil* (nämlich *LH* = 144) ist nun durch das Ergebnis 24 von (8.4) zu teilen, was 6 (und damit den Buchstaben **F**) ergibt.

Teilaufgabe 9

9. Suche 3 Zahlen continue proportiona-
les, welche zusammen bringen 31 und ihre
Quadrat 651 machen/ wann nun solche gefunden/
so wisse/ das die kleiner Zahl zeigt den 4ten des
2ten/ 1ten des 4ten/ 2ten des 15ten/ 3ten
des 20ten/ 2ten des 22ten/ 3ten des 25ten/
und 4ten des 27ten worts. Die mittler Zahl
weist den 2ten des 2ten/ 4ten des 4ten/ den
2ten und 3ten des 6ten/ 1ten und 4ten des
11ten/ 1ten und 4ten des 13ten/ den 6ten
und 9ten des 14ten/ 2ten und 4ten des 17ten/
2ten des 18ten/ 2ten und 6ten des 19ten/
den 2ten des 24ten/ 5ten und 7ten des 25ten/
2ten des 26ten/ 2ten des 29ten/ 4ten und
6ten des letzten worts. Von der Zahl der
grössern ziehe die Zahl des 2ten Buchstaben
2ten worts/ der Rest offenbahret den letzten
des 3ten/ 3ten des 5ten/ 1ten des 9ten/ 3ten des

10ten/ 8ten des 17ten/ den 1ten und 5ten des 27ten worts.

Für die Summe der drei Glieder x, ax, a^2x einer geometrischen Folge gelte

$$x \cdot (1 + a + a^2) = 31.$$

Wegen 31 prim und a ganzzahlig folgt

$$x = 1, a = 5. \qquad (9.1)$$

Die zweite Gleichung (Summe der Quadrate der drei Folgenglieder)

$$x^2 \cdot (1 + a^2 + (a^2)^2) = 651$$

enthält keine neue Information, sondern bestätigt die Lösung (9.1).

Die gesuchten Buchstaben erhält man mit (9.1) aus

$$x = 1 \qquad \text{(Buchstabe } \mathbf{A}\text{)}$$
$$a\,x = 5 \qquad \text{(Buchstabe } \mathbf{E}\text{)}$$
$$a^2\,x - 5 = 20 \qquad \text{(Buchstabe } \mathbf{U}\text{)}.$$

Teilaufgabe 10

10. Ist ein Thurn M nach der Geometria von zweyen Ständen zu messen/ dessen erster Standt 5. und ander Standt 7 Regenspurger Werck-Schuch von dem Thurn zuruck genommen/ welche Höhe des weitern Standts gegen dem kleinern Standt um 12 Werck-Schuh des Thurns mehr gemessen worden/ wann nun die gantze Höhe FN des Thurns von beeden Linien AN und CO abgezogen/ weist der Rest einen Buchstaben (worüber 2 Strichlein sollen gemacht werden) welcher bringt den 3ten des 7ten worts.

Es geht um zwei rechtwinklige Dreiecke, deren Katheten jeweils aufeinander liegen (s. Abb. 4). Die Angaben $FC = 5$, $FA = 7$ und $ON = 12$ im Text reichen nicht aus, um die Längen der anderen Dreieckseiten zu bestimmen. Aus der Graphik (die gepunktete Linie dient offenbar nur der Abgrenzung vom Text) kann man allerdings entnehmen, dass $FO = ON$, dass die Turmhöhe FN also 24 beträgt.

Man kann nun den Satz von Pythagoras sowohl im großen Dreieck AFN

$$FA^2 + FN^2 = 7^2 + 24^2 = 625 = 25^2 = AN^2$$

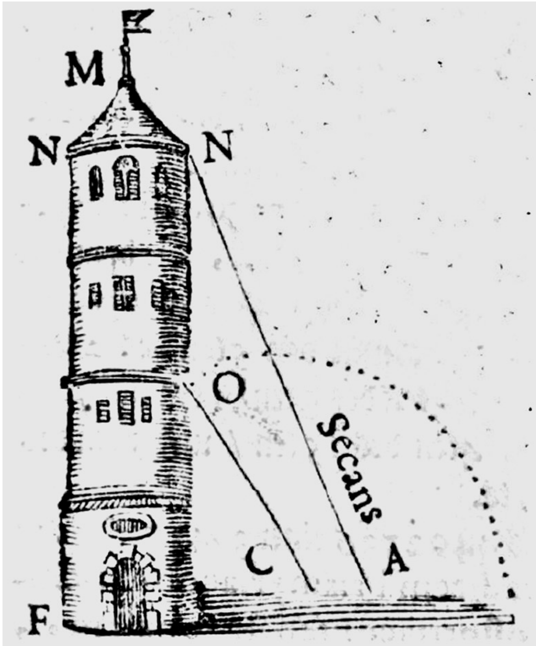
als auch im kleinen Dreieck CFO anwenden

$$FC^2 + FO^2 = 5^2 + 12^2 = 169 = 13^2 = CO^2,$$

und erhält die fehlenden Seiten

$$AN = 25, \;\; CO = 13.$$

Abb. 4: Zu Teilaufgabe 10
(WENDLER, Arithmetica, X1[r])



Der gesuchte Buchstabe berechnet sich aus

AN + *CO* – *FN* = 25 + 13 – 24 = 14 (Buchstabe O mit *2 Strichlein*, also **Ö**).

Teilaufgabe 11

11. Seyn des dritten Cörperlichen Geschlechts
vier nach einander folgende Columnar-
Zahlen aus enneagonalien componirt,
die machen 518. wann man zu der letzten
Columnar-Zahl/ der Jahrzahl CHristi
1668 ihre Indiction-Zahl +4 addirt/
und das Factum durch die 3 erst gefundenen
Columnar-Zahlen theilet/ erscheinet eine
Zahl von etlichen uniteten, wann man zu
solcher Zahl 12 addirt/ weist das Collect
den 7ten Buchstaben des 17 worts.

Die 11. Teilaufgabe bezieht sich – wie die 4. Teilaufgabe (Polygonal- und Pyramidalzahlen) – auf figurierte Zahlen. Hier geht es um so genannte Columnarzahlen (Säulenzahlen). Columnarzahlen erster Art sind die Produkte aus Polygonalzahlen und ihren Ordnungen: $c_{k,n,1} = n\ z_{k,n}$. In der geometrischen Vorstellung werden n gleich große k-Eck-Schichten n-ter Ordnung übereinander gelegt, wobei ein k-eckiges gerades Prisma (eine Säule) entsteht.

Columnarzahlen höherer Art entstehen durch sukzessive Summation von solchen der nächst niedrigeren Art. Geometrisch betrachtet stellt man Säulen unterschiedlicher Ordnung aufeinander.

Die folgende Tabelle zeigt diesen Prozess für 9-Eck-Zahlen (*enneagonalien*).

Ordnung n	9-Eck-Zahl $z_{9,n}$	9-Columnarzahl 1. Art $c_{9,n,1} = n \cdot z_{9,n}$	9-Columnarzahl 2. Art $c_{9,n,2} = \sum_{j=1}^{n} c_{9,j,1}$	9-Columnarzahl 3. Art $c_{9,n,3} = \sum_{j=1}^{n} c_{9,j,2}$
1	$z_{9,1} = 1$	$c_{9,1,1} = 1$	$c_{9,1,2} = 1$	$c_{9,1,3} = 1$
2	$z_{9,2} = 9$	$c_{9,2,1} = 18$	$c_{9,2,2} = 19$	$c_{9,2,3} = 20$
3	$z_{9,3} = 24$	$c_{9,3,1} = 72$	$c_{9,3,2} = 91$	$c_{9,3,3} = 111$
4	$z_{9,4} = 46$	$c_{9,4,1} = 184$	$c_{9,4,2} = 275$	$c_{9,4,3} = 386$
5	$z_{9,5} = 75$	$c_{9,5,1} = 375$	$c_{9,5,2} = 650$	
				$\sum_{j=1}^{4} c_{9,j,3} = 518$

Nun benötigt man noch eine Formel für die Indiktionszahl (Römerzinszahl) i eines Jahres m:

$$i(m) = (m + 3) \bmod 15,$$

woraus sich $i(1668) = 6$ ergibt.[7] Damit berechnet sich der gesuchte Buchstabe über

$$((c_{9,4,3} + i(1668) + 4) \,/\, (c_{9,1,3} + c_{9,2,3} + c_{9,3,3})) + 12$$
$$= ((386 + 6 + 4) \,/\, (1 + 20 + 111)) + 12 = 15,$$

was dem Buchstaben **P** entspricht.

Teilaufgabe 12

12. Seyn aus den 6 ersten Pentagonalien Pyrgoidal-Zahlen componirt, die bringen 756. die 5 ersten von der letzten abgezogen/ der Rest und 2 bringt den 5ten des 2ten/ 7ten des 7ten/ 6ten des 8ten/ 1ten und 4ten des 14ten/ 4ten des 15ten/ und 5ten des 19ten worts.

Die 12. Teilaufgabe bezieht sich – wie schon die 4. Teilaufgabe (Polygonal- und Pyramidalzahlen) und die 11. Teilaufgabe (Columnarzahlen) – auf figurierte Zahlen. Hier geht es nun um so genannte Pyrgoidalzahlen (Turmzahlen).

Eine k-Pyrgoidalzahl (Turmzahl) $g_{k,j}$ wird konstruiert, indem man eine k-Columnarzahl (1. Art) $c_{k,j,1}$ und eine k-Pyramidalzahl $p_{k,j}$ (mit gleicher Eckenzahl k) addiert, wobei die Ordnung der k-Pyramidalzahl um eins kleiner ist als die der k-Columnarzahl:[8]

$$g_{k,n} = p_{k,n-1} + c_{k,n,1} \,.$$

[7] Vgl. ZEMANEK, Kalender, S. 58.
[8] Vgl. MARPURG, Progreßionalcalcul, S. 304–306.

Geometrisch betrachtet ist eine *k*-Pyrgoidalzahl ein *k*-eckiges gerades Prisma (Säule), auf der als Dach eine Pyramide sitzt, die als Grundfläche ein *k*-Polygon hat, das um eine Stufe kleiner ist (Ordnung n–1) als die Deckfläche des Prismas (Ordnung n).

Die folgende Tabelle zeigt diesen Prozess für 5-Eck-Zahlen (*pentagonalien*).

Ordnung n	5-Eck-Zahl $z_{5,n}$	5-Columnarzahl 1. Art $c_{5,n,1} = n \cdot z_{5,n}$	5-Pyramidalzahl $p_{5,n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} z_{5,j}$	5-Pyrgoidalzahl $g_{5,n} = p_{5,n-1} + c_{5,n,1}$
1	$z_{5,1} = 1$	$c_{5,1,1} = 1$	0	$g_{5,1} = 1$
2	$z_{5,2} = 5$	$c_{5,2,1} = 10$	$p_{5,1} = 1$	$g_{5,2} = 11$
3	$z_{5,3} = 12$	$c_{5,3,1} = 36$	$p_{5,2} = 6$	$g_{5,3} = 42$
4	$z_{5,4} = 22$	$c_{5,4,1} = 88$	$p_{5,3} = 18$	$g_{5,4} = 106$
5	$z_{5,5} = 35$	$c_{5,5,1} = 175$	$p_{5,4} = 40$	$g_{5,5} = 215$
6	$z_{5,6} = 51$	$c_{5,6,1} = 306$	$p_{5,5} = 75$	$g_{5,6} = 381$
				$\sum_{j=1}^{6} g_{5,j} = 756$

Laut Aufgabenstellung ist nun zu berechnen

$$g_{5,6} - (g_{5,1} + g_{5,2} + g_{5,3} + g_{5,4} + g_{5,5}) + 2 = 381 - 375 + 2 = 8,$$

was zum Buchstaben **H** führt.

Teilaufgabe 13

13. Weise aus 4492336 einer 37438eckichten
Zahl den radicem Trismyria[hepta]*chi-*
liatetracosiotriacontaoctagonalem,
von welcher Wurtzel 2 Subtrahirt/ das Re-
siduum bringt den 2ten des 1ten/ 2ten des
12ten/ 2ten des 14ten/ und 2ten des 21ten worts.

Die 13. Teilaufgabe bezieht sich – wie schon die 4. Teilaufgabe (Polygonal- und Pyramidalzahlen), die 11. Teilaufgabe (Columnarzahlen) und die 12. Teilaufgabe (Pyrgoidalzahlen) – auf figurierte Zahlen. Hier geht es wieder um die einfacheren Pyramidalzahlen, allerdings bei 37438-Ecken. Wendler hat in *Analysis vel resolutio*, 441r–443v, griechische Bezeichnungen für Vielecke gesammelt, darunter auf 443v auch die gleiche falsche für 37438-Ecke, wie sie im Druck auftaucht.

Gefragt ist, an welcher Stelle der Folge von 37438-Eck-Zahlen die Zahl 4492336 vorkommt. Entweder man konstruiert diese 37438-Eck-Zahlen sukzessive oder man benutzt die allgemeine Formel für Polygonalzahlen

$$z_{k,n} = (k - 2)\, n\, (n - 1) / 2 \ + n.$$

Zu lösen ist also die quadratische Gleichung

$$4492336 = (37438 - 2)\, n\, (n - 1) / 2 + n$$

bzw.

$$18718\, n^2 - 18717\, n - 4492336 = 0,$$

deren positive Lösung 16 ist.

Die Zahl 4492236 ist also die 16te 37438-Eck-Zahl. Vermindert man die Zahl 16 um 2, so erhält man 14 und damit den Lösungsbuchstaben **O**.

Teilaufgabe 14

14. Und letztens suche einer Cörperlichen Figur deren Länge/ Breite und Tieffe allenthalben 4 Regenspurger Werck-Schuch hält/ aus dero zweyfachen continenz Breite/ Länge und Tieffe mehr 9 22/25. seyn begert 6 Quadratzahlen zu machen/ von welcher letzten Quadratzahl Wurtzel/ sollen 244 und 53 abgezogen werden/ und aus den restanten zwo Congruens-Zahlen zu colligiren, von welchem facto derselben 47083 gezogen/ das Residuum demonstrirt einen zweyfachen Buchstaben/ welche weisen den 6ten und 7ten Buchstaben des 27 worts/ und des dritten worts erster Buchstab ist der letzte des Alphabets.

1. Schritt: Das Volumen eines Würfels der Seitenlänge 4 soll verdoppelt werden, wonach sich die neue Seitenlänge $4\sqrt[3]{2}$ ergibt. Wendler intendierte offensichtlich die Näherung $\sqrt[3]{2} \approx 1\,26/100$. Damit erhält man als neue Seitenlänge 5 1/25. Dann wird addiert:

$$\textit{Länge} + \textit{Breite} + \textit{Höhe} + 9\,22/25 = 3 \cdot 5\,1/25 + 9\,22/25 = 25.$$

2. Schritt: Die Quadratzahl 25 soll nun in eine Summe von sechs (!) rationalen (!) Quadratzahlen zerlegt werden, was natürlich nicht eindeutig möglich ist. Hierzu finden sich in Wendlers *Analysis vel resolutio*, 361v–362v, einige Beispiele, allerdings ohne jeglichen theoretischen Hintergrund. Wendler leitet auf 362v glücklicherweise auch genau die Zerlegung her, ohne die man den 2. Schritt gar nicht lösen könnte. Sein intuitives Verfahren basiert auf der (zur Konstruktion Pythagoreischer Tripel dienenden) pythagoreischen Gleichung

$$(2uv)^2 + (u^2 - v^2)^2 = (u^2 + v^2)^2, \qquad (14.1)$$

die man nach Multiplikation mit $n^2/(u^2 + v^2)^2$ dazu verwenden kann, natürliche Quadratzahlen n^2 als Summe von zwei rationalen Quadratzahlen darzustellen:

$$((2uvn)/(u^2 + v^2))^2 + (n(u^2 - v^2)/(u^2 + v^2))^2 = n^2 \qquad (14.2)$$

Setzt man nun (ähnlich wie Wendler) $x := 2un/(u^2 + v^2)$, so bekommt die Gleichung (14.2) die folgende Form:

$$x^2v^2 + (ux - n)^2 = n^2 \qquad (14.3)$$

Für die Aufgabenstellung braucht man aber eine Zerlegung von 25 in sechs Summanden. Ersetzt man in (14.3) v^2 durch $\sum_{i=1}^{j-1} v_i^2$, wobei die $v_i{}^2$ natürliche Quadratzahlen sind (die Summe selbst muss keine natürliche Quadratzahl sein), so erhält man mit

$$x := 2un/\left(u^2 + \sum_{i=1}^{j-1} v_i^2\right) \qquad (14.4)$$

eine Zerlegung von n^2 in j quadratische Summanden

$$x^2 \sum_{i=1}^{j-1} v_i^2 + (ux - n)^2 = x^2 v_1^2 + \ldots + x^2 v_{j-1}^2 + (ux - n)^2 = n^2. \qquad (14.5)$$

Für $n^2 = 25$ wählt Wendler $u = 2$; $v_1 = 1$; $v_2 = 2$; $v_3 = 3$; $v_4 = 4$; $v_5 = 5$ ohne weitere Begründung. Diese Festlegung ist nicht zwingend, daher ist die daraus abgeleitete Zerlegung nicht die einzig mögliche! Mit $\sum_{i=1}^{5} v_i^2 = 55$ erhält er aus (14.4) $x = 20/59$ und damit aus (14.5) die Zerlegung

$$(20/59)^2 + (40/59)^2 + (60/59)^2 + (80/59)^2 + (100/59)^2 + (255/59)^2 = 25. \qquad (14.6)$$

Vom letzten Wert 255/59 in (14.5) sollen dann laut Aufgabenstellung 244 bzw. 53 abgezogen werden. Mit dieser mathematisch unglücklichen Formulierung ist gemeint, dass vom Zähler 255 die Zahl 244 abgezogen wird und vom Nenner 59 die Zahl 53. Man erhält also die beiden Werte 11 und 6, mit denen weitergerechnet wird.

<u>3. Schritt</u>: Zu 11 und 6 sollen jetzt zwei *Congruens-Zahlen* (*Numeri congruentes*) gebildet werden. Wendler verwendet (*Analysis vel resolutio*, 437^{r}) die heute noch üblichen Definitionen für Kongruum (bei ihm *Congruens*) und kongruentes Quadrat (bei ihm *Congruenszahl*).

Eine natürliche Zahl k nennt man heute <u>kongruent</u>, genau dann wenn $k = 1/2\, ab$ ist und $a, b, \sqrt{a^2 + b^2}$ ein Pythagoreisches Tripel. Jede kongruente Zahl kann damit als Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks aufgefasst werden. <u>Kongruum</u> ($2ab$), ($a^2 - b^2$) und <u>kongruentes Quadrat</u> ($a^2 + b^2$) bilden ihrerseits wiederum ein Pythagoreisches Tripel. Dieser Zusammenhang von Pythagoreischen Tripeln, Flächen von rechtwinkligen Dreiecken und kongruenten Zahlen (*numeri congrui*) war übrigens schon im Mittelalter dem Leonardo von Pisa (Fibonacci) bekannt.[9]

Wichtig für das Folgende ist, dass die Bildung von *Numeri congruentes* per definitionem ein ganzzahliges Pythagoreisches Zahlentripel als Ausgangspunkt voraussetzt. Nun sind die beiden im zweiten Schritt hergeleiteten Zahlen 11 und 6 aber nicht Teil eines solchen, da weder $\sqrt{11^2 - 6^2}$ noch $\sqrt{11^2 + 6^2}$ ganzzahlig ist.

Daher muss man erst einen Zwischenschritt einschieben, in dem man aus den beiden Werten ein Pythagoreisches Zahlentripel konstruiert. Dies geschieht mit Hilfe der seit dem Altertum bekannten Formel (vgl. (14.1)), in die man $u = 11$ und $v = 6$ einsetzt:

[9] Vgl. CANTOR, Vorlesungen II, S. 42–45.

$$a = 2 \cdot u \cdot v = 2 \cdot 11 \cdot 6 = 132,$$
$$b = u^2 - v^2 = 11^2 - 6^2 = 85,$$
$$c = u^2 + v^2 = 11^2 + 6^2 = 157,$$

so dass $a^2 + b^2 = c^2$, also $132^2 + 85^2 = 157^2$, gilt.

Zu diesem Pythagoreischen Tripel ist dann das Kongruum

$$2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot 132 \cdot 85 = 22440$$

und das kongruente Quadrat

$$c^2 = a^2 + b^2 = 157^2 = 24649.$$

Nun soll die Summe dieser beiden Zahlen gebildet und davon 47083 abgezogen werden, also

$$22440 + 24649 - 47083 = 6 \qquad \text{(Buchstabe } \mathbf{F}\text{).}$$

Wendler rechnet dieses Beispiel in *Analysis vel resolutio*, 437^v, durch.

3 Lösungsspruch von Wendlers Wortrechnungsrätsel

Frag; nach dem Wunsch/ auch
wie er heissen soll?
Wer nun auflöset dises hier
Und bringt den rechten Wunsch herfür
Auch wie derselbe heissen soll?
Der rechnet recht und trefflich wol.

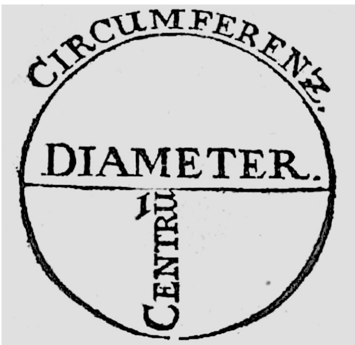


Abb. 5: Zum Lösungsspruch (WENDLER, Arithmetica, X2^r)

Die Lösung des gesamten Rätsels lautet

01 Gott	06 seelig	11 einen	16 in	21 so	26 des
02 bewahr	07 frölich	12 wol	17 Regens-	22 lang	27 Umlauffs
03 zu	08 frisch	13 edlen	purg	23 bis	28 wird
04 aller	09 und	14 hoch-	18 der	24 der	29 sein
05 Stund	10 gsund	weisen	19 werthen	25 Diameter	30 symeter
		15 Rath	20 Statt		

Der Ausdruck *symeter* bedeutet wohl „kommensurabel". Somit spielt dieser Spruch auf die Inkommensurabilität von Kreisdurchmesser (*Diameter*) und Kreisumfang (*Umlauff*) an, die sich nie ändern wird, so dass der Wunsch ewig Bestand hat. Das würde auch zur Graphik am Ende des Rätsels passen.

Literaturverzeichnis

Quellen

Johann HEMELING, Neu vermehrter vollkommener Rechenmeister, Leipzig: Johann Christoph Meißner 1753 (BSB, Math.p. 214m).

Sebastian KURZ, Resolutio. Das ist: Aufflösung vieler schöner/ kunstreicher/ Cossischer vnnd Polygonalischer Exempla etlicher fürnemer vnnd berühmbter Rechenmeister/ so zu end jhrer Rechenbücher theils ohne Facit gesetzt, Nürnberg: Johann Lantzenberger 1604 (BSB, Res/4 Diss. 2646#Beibd. 4).

Friedrich Wilhelm MARPURG, Anfangsgründe des Progreßionalcalculs, Berlin: Lange 1774.

Georg WENDLER, Arithmetica practica, Regensburg: Christoph Fischer 1667 (SBR, Philos. 1334 [mit Frontispiz], Philos. 978 [ohne Frontispiz]); inhaltlich unveränderter Neudruck Regensburg: Johann Zacharias Seidel 1698 (UB Leipzig).

Georg WENDLER, Analysis vel resolutio, [Nürnberg, Regensburg ca. 1645–1650] (BSB, Cgm 3789).

Georg WENDLER, Memorialbuch [Titel lt. fol. 2^v], [Nürnberg, Regensburg ca. 1645–1650] (BSB, Cgm 3788).

Sekundärliteratur

Moritz CANTOR, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik Bd. II, Leipzig ^{2}1900, ND Stuttgart 1965.

Menso FOLKERTS, Die Entwicklung und Bedeutung der Visierkunst als Beispiel der praktischen Mathematik der frühen Neuzeit (= Humanismus und Technik Bd. 18, Heft 1), Berlin 1974.

Rainer GEBHARDT, Das Rechenbuch der Freiberger Rechenmeister Oswald Ulman und Caspar Thierfelder von 1564, in: Rainer GEBHARDT (Hg.), Rechenkunst und Mathematik in der frühen Neuzeit (= Schriften des Adam-Ries-Bundes 31), Annaberg-Buchholz 2023, S. 103–128.

Rudolf HALLER, Anton Neudörffers Rätsel gelöst mit Hilfe von Sebastian Kurz und Johann Conrad Redlich, in: Rainer GEBHARDT (Hg.), Visier- und Rechenbücher der frühen Neuzeit (= Schriften des Adam-Ries-Bundes 19), Annaberg-Buchholz 2008, S. 265–274.

Rudolf HALLER – Alfred HOLL, Zwei Rätsel aus Anton Neudörffers *Grosser Arithmetic*, in: Rainer GEBHARDT (Hg.), Rechenmeister und Mathematiker der frühen Neuzeit (= Schriften des Adam-Ries-Bundes 25), Annaberg-Buchholz 2017, S. 91–102.

Rudolf HALLER – Alfred HOLL (Hg.) – Yvonne STRY – Alexander GROß, Anton Neudörffer (Nürnberg 1571–1628 Regensburg) und seine *Grosse Arithmetic* (= Regensburger Studien zur Literatur und Kultur des Mittelalters 5), Berlin 2020.

Alfred HOLL, Polygonalzahlen und ihre Quadrat-, Pronic- und Trigonalwurzeln, in: Rainer GEBHARDT (Hg.), Rechenkunst und Mathematik in der frühen Neuzeit (= Schriften des Adam-Ries-Bundes 31), Annaberg-Buchholz 2023, S. 129–134.

Ivo SCHNEIDER, Johannes Faulhaber 1580–1635, Basel, Boston, Berlin 1993.

Yvonne STRY, Kandlers Zahlenrätsel und Wendlers Lösung, in: Edith FEISTNER – Alfred HOLL (Hg.), Erzählen und Rechnen in der frühen Neuzeit. Interdisziplinäre Blicke auf Regensburger Rechenbücher (= Regensburger Studien zur Literatur und Kultur des Mittelalters 1), Berlin 2016, S. 375–396.

Johannes TROPFKE, Geschichte der Elementar-Mathematik. Bd. VI: Analysis, Analytische Geometrie, Berlin, Leipzig ²1924.

Heinz ZEMANEK, Kalender und Chronologie, München, Wien 1981.