Die Wortrechnungsrätsel aus der Rechenmeisterprüfung des Regensburger Rechenmeisters Georg Wendler am 30.09.1646 in Nürnberg

Von Martin Hellmann und Alfred Holl

1. Einführung

Vor einem Jahr hat einer von uns (Alfred Holl) zusammen mit Yvonne Stry an dieser Stelle über das komplexe 14-teilige Buchstabenzahlenrätsel des Regensburger Rechenmeisters Georg Wendler (Burglengenfeld 1619–1688 Regensburg) berichtet, das dieser 1667 am Schluss seines Lehrbuchs *Arithmetica practica* (U5^{v}–X2^{r}) veröffentlichte.[1] Wendler hat handschriftlich noch zwei weitere solche Rätsel (damals *Wortrechnung* genannt) überliefert, die auch ihre Schwierigkeiten bieten und deshalb einen eigenen Beitrag wert sind.[2] Die Rätsel bilden den Abschluss seiner 40-seitigen Zusammenstellung der Prüfungsfragen, die ihm anlässlich seiner Rechenmeisterprüfung in Nürnberg am 30.09.1646 vorgelegt wurden.[3] Eine derartige Dokumentation ist einmalig und daher für die Mathematikgeschichte besonders wertvoll.[4]

Buchstabenzahlenrätsel erfreuten sich im 16. und 17. Jh. gerade bei Rechenmeisterkollegen einer besonderen Beliebtheit, finden aber auch das Interesse der heutigen Mathematikgeschichte.[5] Als Lösungen erhält man deutsche oder lateinische Sinnsprüche oder Namen von Heiligen. Das Alphabet wird durch die Zahlen von 1 bis 24 codiert (*I, J* und *U, V* werden entsprechend dem Lateinischen jeweils nur einmal gezählt). Die konkreten Zahlenwerte werden mit mathematischen Methoden ermittelt und die entsprechenden Buchstaben an gegebenen Positionen eingesetzt.

Der mathematische Wortschatz des 17. Jahrhunderts unterschied sich teilweise stark von dem heutigen, so dass hier zum besseren Textverständnis die wichtigsten ungewohnten Ausdrücke der beiden Rätsel vorausgeschickt seien:

1 Holl – Stry, Wortrechnungsrätsel.

2 Ein herzlicher Dank geht an Herrn OStD a. D. Rudolf Haller, München, für die akribische Durchsicht des vorliegenden Beitrags.

3 Wendler, Memorialbuch (Cgm 3788), 343^{r}–367^{v}, hier speziell 366^{r}–367^{v}; vollständige Edition in Folkerts, Ausbildung, S. 106–125, hier speziell S. 123–125; teilweise in Haller – Holl, Anton Neudörffer, S. 93–96.

4 Es gibt daneben nur die Aufgabensammlung zur Prüfungsvorbereitung von Johann Heer (Quaestiones).

5 Vgl. Gebhardt, Rechenbuch; Haller, Neudörffers Rätsel; Haller – Holl, Zwei Rätsel; Stry, Kandlers Zahlenrätsel.

Abb. 1: Überschrift zu den Wortrechnungsrätseln (Wendler, Memorialbuch, 366r)

aggregat: Summe
augieren: multiplizieren
colligieren: addieren
diameter: Kreisdurchmesser
factum: (Zwischen-)Ergebnis
quotus: Ergebnis, Quotient
radix: Wurzel
rest: Differenz
vermehren in: multiplizieren mit

Die beiden Wortrechnungsrätsel stehen – nach Aufgaben zu u.a. Arithmetik, Folgen, Brüchen, Algebra, Geometrie, Stereometrie, Fassmessung und Buchhaltung – am Ende der Prüfungsfragen: *Letzlich und zum Bschlus von Wort Rechnung* (Abb. 1).[6] Wendler hat sicher von einer Vorlage ins Reine geschrieben, so dass Abschreibfehler vorkommen, die Konjekturen verlangen. Das Original ist jeweils kursiv gesetzt, Konjekturen und Erläuterungen recte.

2. Wendlers erstes Prüfungsrätsel

Das Rätsel verschlüsselt einen Wunsch aus sechs Wörtern.

> *Ich hab einen Wunsch von Sechs Wortten. Wer nun denselben begert zu wissen, der wolle unbeschwerdt das ABC mit Zahlen bezeichnen, nemblich A 1. und Z 24. und hernach folgenden bericht mercken.*

[6] Wendler, Memorialbuch (Cgm 3788), 366r–367v; Transkription in Anlehnung an die Edition in Folkerts, Ausbildung, S. 123–125, mit den Konventionen in Haller – Holl, Anton Neudörffer, S. 278–283.

Danach folgen die 9 Teilaufgaben. Teilaufgabe 8 ist eine rein arithmetische Aufgabe, die übrigen sind einfache algebraische. Die Teilaufgaben 1, 2, 3, 4 und 6 lassen sich leicht lösen, wobei 3 insofern interessant ist, als es um eine Gleichung 4. Grades geht. Damit kann man schon große Teile des Lösungsspruchs erschließen und den Rest erraten. Dann wird die Bearbeitung schwieriger, weil die Aufgabenstellungen Abschreibfehler enthalten, die man rückwärts ausgehend von einem sinnvollen Lösungsspruch korrigieren muss. So verlangen die Teilaufgaben 5, 7, 8 und 9 diverse Konjekturen. Bei Teilaufgabe 5 liegen sie aus mathematischen Gründen auf der Hand, bei 7 gelingen sie auch noch gut, 8 und 9 verlangen jedoch weitergehende und nicht eindeutig mögliche Interpretationen, um zu einem sprachlich sinnvollen Ergebnis zu kommen.

Teilaufgabe 1

Hab Ich zu einer Zahl gethan 12 und 1. vnd vorhero davon genommen 2. und den Rest mit der ganzen Summa vermehret, welche bringt Neunhundert Sechs und Dreissig. Wenn man von der zahl die Ich anfangs gehabt habe 19 abziehet, weist der Rest den allerersten Buchstaben Ersten worts.

Die Bestimmungsgleichung für die *anfangs gehabte* Zahl x lautet

$$(x + 12 + 1) \cdot (x - 2) = 936$$

Umgeformt ergibt sich daraus die quadratische Gleichung

$$x^2 + 11x - 962 = 0$$

Sie hat die Lösungen $x_1 = 26$ und $x_2 = -37$.

Die positive Lösung führt zu der gesuchten Zahl

$$26 - 19 = 7 \qquad \text{(Buchstabe } \mathbf{G}\text{)}$$

Teilaufgabe 2

Hab Ich dreyer Buchstaben Zahlen aus dem ABC genommen. Wenn man des Ersten Buchstaben Zahl mit des andern Buchstaben Zahl vermehret kommen 40, und des andern Buchstaben Zahl mit des driten Buchstaben Zahl 20. Dann des dritten Buchstaben Zahl mit des ersten Buchstaben Zahl vermehret 32, der erste Buchstab weist den Ersten des andern worts und fünfften Worts letzten Buchstaben. Der ander Buchstaben zeigt des andern Worts andern Buchstaben, und andern Buchstaben Vierdten worts. Dann Sechsten Worts fünfften und achten Buchstaben. Der dritte Buchstaben weist den Sibenden Buchstaben des Sechsten Worts.

Die erste Zahl sei x, die zweite y und die dritte z. Dann gelten die folgenden drei Gleichungen

$$x \cdot y = 40$$
$$y \cdot z = 20$$
$$x \cdot z = 32$$

Die Lösungen sind

$x = 8$ (Buchstabe **H**)

$y = 5$ (Buchstabe **E**)

$z = 4$ (Buchstabe **D**)

Diese Buchstaben sind an den angegebenen Stellen im Rätsel einzusetzen.

Teilaufgabe 3

Hat man zwo Zahlen, deren eine gegen der andern umb 60 mehr ist, Wenn man derselben aggregat in das aggregat ihrer Cubic Zahl vermehret kommen 163482624. Wann man solche zwo Zahlen addirt und die Summa theilt in 12, und zum quotienten 1 addirt, weist das factum des vierdten Worts letzten Buchstaben und Sechsten Worts Sechsten: und letzten Buchstaben.

Es geht um die Multiplikation der Summe zweier Zahlen mit der Summe ihrer Kuben. Die beiden Zahlen seien x und $x + 60$.[7] Dann gilt

$$(x + (x + 60)) \cdot (x^3 + (x + 60)^3) = 163\,482\,624$$
$$(2x + 60) \cdot (2x^3 + 180x^2 + 10800x + 216000) = 163\,482\,624$$

Durch 4 geteilt, ausmultipliziert und zusammengefasst ergibt sich

$$x^4 + 120x^3 + 8100x^2 + 270000x - 37\,630\,656 = 0$$

Die Lösungsmethode für Gleichungen 4. Grades wurde erstmals 100 Jahre vor Wendlers Rechenmeisterprüfung (1646) von Ludovico Ferrari (Bologna 1522–1565 Bologna) gefunden. Sein Lehrer Girolamo Cardano (Pavia 1501–1576 Rom) publizierte sie in seiner *Ars Magna* (Nürnberg, Johann Petreius[8] 1545), Kapitel 39.[9]

[7] Da man die beiden Zahlen für die Lösung eigentlich gar nicht braucht, sondern nur ein Zwölftel ihrer Summe, könnte man dieses als Unbekannte x wählen. Damit wären die beiden Zahlen $6x + 30$ und $6x - 30$ und man hätte als Ansatz $12x \cdot ((6x - 30)^3 + (6x + 30)^3) = 163\,482\,624$. Von dieser Gleichung gelangt man ohne weitere Substitution zur biquadratischen Gleichung $x^4 + 75x^2 - 31536 = 0$, die von vornherein weder einen linearen und noch einen kubischen Summanden enthält. Eine Lösung ist $x = 12$.

[8] Johann Petreius (1496/97–1550) war der Schwager des Nürnberger Schreib- und Rechenmeisters Johann Neudörffer (1497–1563).

[9] Das Motiv dieser Teilaufgabe, die Multiplikation der Summe (*aggregatum*) zweier Zahlen mit der Summe ihrer Kuben, findet sich auch in Cardano, Ars magna, Kapitel 34, Quaestio 2, 60^r).

Cardano beschränkte sich dort auf die Form ohne den kubischen Summanden, allerdings ohne zu schreiben, dass mit der Substitution $x = y - a/4$ (a der Faktor des kubischen Summanden) der kubische Summand in jeder Gleichung 4. Grades eliminiert werden kann.[10] Da die *Ars magna* in Nürnberg gedruckt wurde, ist anzunehmen, dass dieser Lösungsweg im 16. Jh. in Nürnberger Mathematikerkreisen bekannt war, obwohl das Latein der *Ars magna* nicht gerade leicht zu verstehen ist und die italienische algebraische Notation viel aufwändiger als die deutsche war.[11]

In der vorliegenden Gleichung ist $a = 120$, so dass die Substitution $x = y - 30$ lautet. Nach einigen einfachen Umformungen verschwindet mit der Elimination des kubischen Summanden günstigerweise auch der lineare, so dass man eine biquadratische Gleichung erhält, nämlich

$$y^4 + 2700y^2 - 40\,870\,656 = 0$$

Hierfür liegt die zweite Substitution $y^2 = z$ nahe, die zu einer quadratischen Gleichung führt

$$z^2 + 2700z - 40\,870\,656 = 0$$

Sie hat die Lösungen $z_1 = 5184$ und $z_2 = -7884$. Die Rücksubstitution mit $y = \sqrt{z}$ liefert $y_{1/2} = +/- 72$ zu z_1. Aus der negativen Lösung z_2 konnte man im 16. Jh. keine Wurzel ziehen, da damals die komplexen Zahlen nicht bekannt waren.

Mit der zweiten Rücksubstitution $x = y - 30$ erhält man $x_1 = 42$ und $x_2 = -102$. Die positive Lösung ergibt die beiden Zahlen (42 und 42 + 60 = 102) und führt zum gesuchten Buchstaben

$$((42 + 102) / 12) + 1 = 13 \qquad \text{(Buchstabe } \mathbf{N}\text{).}$$

Teilaufgabe 4

So man zu einem quadrat seiner Feldung eine Seiten addirt kommen 90. Deren läng einer Seiten weist des dritten worts mittlern Buchstaben und dritten Buchstaben Vierdten worts.

Sei x die Seitenlänge eines Quadrats, dann ist x^2 seine Fläche (*Feldung*). Beides addiert soll 90 ergeben:

$$x^2 + x = 90$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 9$ und $x_2 = -10$.

Die positive Lösung liefert den Buchstaben **I**.

[10] Vgl. Tropfke, Elementarmathematik, S. 452.

[11] Im Brief des Frankfurter Rechenmeisters Simon Jacob (um 1525–1564) an seinen Nürnberger Lehrmeister Johann Neudörffer vom 14.12.1552 gibt es einen konkreten Nachweis für die Rezeption von Cardanos *Ars magna* in Nürnberg (vgl. die Edition in Haller – Holl, Briefsammlung, S. XIV–XVII und S. 6–9).

Teilaufgabe 5

Ist eine Zahl zu suchen, wenn selbe mit [sich und] *4 wird vermehret*
erwächst eine quadrat Zahl, wenn die mit ihrer Wurtzel
wird augirt kommen 40001688 und die gefundene Zahl in <9> [19]
getheilet, und zum quotienten 8 addirt, weist das factum
des dritten Worts letzten Buchstaben?

Diese Teilaufgabe verlangt die beiden recte gesetzten Konjekturen, sonst läge die gesuchte Zahl außerhalb des Buchstabenbereichs von 1 bis 24.

Die Zahl x genügt folgender Bestimmungsgleichung

$$4x^2 \cdot \sqrt{4x^2} = 40\,001\,688$$

$$x^3 = 5\,000\,211$$

Die Lösung $x = 171$ führt zum gesuchten Ergebnis (*factum*)

$$(171 : 19) + 8 = 17 \qquad \text{(Buchstabe } \mathbf{R}\text{).}$$

Teilaufgabe 6

Mach aus 89 zween theil. Wenn man zum Ersten Theil 1
addirt, weist die Summa des fünfften Worts Ersten
Buchstaben. Von dem andern theil aber 4 $^4/_{17}$ *abgezogen,*
weist der Rest den andern Buchstaben fünfften Worts.

Es geht um eine multiplikative Zerlegung der Primzahl 89 in zwei positive Faktoren. Die Codierung von Buchstaben geschieht nur durch natürliche Zahlen. Daher muss der erste Faktor x eine natürliche Zahl sein, da die Addition von 1 wieder eine solche ergeben muss. Der zweite Faktor muss eine positive rationale Zahl $y + 4\,^4/_{17}$ mit natürlichem y sein, da die Subtraktion von $4\,^4/_{17}$ eine natürliche Zahl ergeben muss.

Also gilt für die beiden Faktoren

$$x\,(y + 4\,^4/_{17}) = 89$$

$$x\,(17y + 72) = 17 \cdot 89$$

Da 17 und 89 Primzahlen sind und man den trivialen Faktor 1 ausschließen kann, folgt hieraus $x = 17$ und $y = 1$. Der erste Faktor in der Zerlegung von 89 hat also den Wert 17, der zweite den Wert $5\,^4/_{17}$.

Die gesuchten Zahlen findet man, wenn man zum ersten Faktor 1 addiert und vom zweiten Faktor $4\,^4/_{17}$ subtrahiert

$$17 + 1 = 18 \qquad \text{(Buchstabe } \mathbf{S}\text{)}$$

$$5\,^4/_{17} - 4\,^4/_{17} = 1 \qquad \text{(Buchstabe } \mathbf{A}\text{)}$$

Teilaufgabe 7

Hat man abermal zwo Zahlen. Wenn man zu der grössern Zahl 9 addirt, so ist Sie 2 mal sovil als die kleinere Zahl. So man aber von der grössern Zahl 9 thut nemmen sein sie gleich. Ziehet man von der gefundenen grössern Zahl <51> [15], *weist der Rest den Ersten Buchstaben des 3 Worts und Ersten Buchstaben Vierdten Worts. und gesuchten kleinere Zahl getheilt in 9, und zum quotienten <6>* [9] *addirt weist die Summa den 3 Buchstaben andern Worts, und dritten, und Vierdten Buchstaben des* 6^{ten} *Worts.*

Sei x die größere Zahl und y die kleinere. Dann gelten die folgenden zwei Gleichungen

$$x + 9 = 2y$$

$$x - 9 = y$$

Die Lösungen $x = 27$ und $y = 18$ liefern das gesuchte Ergebnis

$$27 - 15 = 12 \qquad \text{(Buchstabe } \mathbf{M}\text{)}$$

$$(18 : 9) + 9 = 11 \qquad \text{(Buchstabe } \mathbf{L}\text{)}$$

Dabei wurden die Konjekturen 15 statt 51 und 9 statt 6 vorgenommen, um Buchstaben zu erhalten, die in den übrigen Text passen.

Teilaufgabe 8

Colligire ietzt gefundener Buchstaben ihre Zahlen, und theile das factum in deroselben Stett. der quotient und 10 Weisen den dritten Buchstaben, welcher zwei fach soll sein, des Ersten Worts, und der Verticales, den Vierdten Buchstaben (wenn er doppelt wird gesetzt) des 2 Worts. Weiter addir zu 5 den quotienten, so weist die Summa den andern Buchstaben des Ersten Worts, und Sechsten worts andern Buchstaben.

Die Zahlenwerte der bisher ermittelten Buchstaben sollen aufaddiert und das Ergebnis durch die Anzahl der Stellen (*Stett*) ihres Vorkommens dividiert werden. Also ist anzunehmen, dass die Zahlenwerte der Buchstaben unter Berücksichtigung ihrer Vorkommenshäufigkeit addiert werden sollen.[12]

[12] Analog HEER, Quaestiones, G[i]r.

Die Situation wird in der folgenden Tabelle dargestellt:

Teilaufgabe	**Buchstabe**	**Wert**	**Vorkommen**	**Produkt**
1	G	7	1	7
2	H	8	2	16
	E	5	4	20
	D	4	1	4
3	N	13	3	39
4	I	9	2	18
5	R	17	1	17
6	S	18	1	18
	A	1	1	1
7	M	12	2	24
	L	12	3	33
Summe	**11**	**105**	**21**	**197**

Der gesuchte Quotient aus Werten und Vorkommen ergibt sich nach der Tabelle zu 197/21, was aber keine natürliche Zahl ist und daher nicht zu Buchstabenzahlenwerten passt. Wenn man ohne Vorkommenshäufigkeit rechnet, wird es nicht besser, da 105/11 auch keine natürliche Zahl ist.

Aus diesem Dilemma führen (mindestens) zwei Wege:

- Entweder ist Wendler die Reihenfolge der Teilaufgaben durcheinander geraten. Wenn man nämlich die Teilaufgabe 5 (R) hinter die Teilaufgabe 8 verschiebt und damit in der obigen Tabelle weglässt, entsteht ein akzeptables Ergebnis, nämlich 180/20 = 9.

- Oder der Aufgabensteller hat im Dividenden beim Zusammenzählen einmal den Wert 8 für H vergessen, aber trotzdem im Divisor die richtige Gesamtzahl an Buchstaben genommen. Dann hätte man 189/21 = 9.

Dazu passt auch, dass es einen *Verticalis* zum gefundenen Ergebnis gibt. Hier kann nämlich nur eine auf den Kopf gestellte Ziffer gemeint sein, die dann wieder eine Ziffer sein muss. Das geht nur für die Ziffern 6 und 9, so dass die eben berechnete 9 auch aus diesem Grund sinnvoll ist.

Mit diesen Konjekturen kommt man auch zu Buchstaben, die zusammen mit den bisher gefundenen Buchstaben sinnvolle Wörter ergeben:

9 + 10 = 19 (Buchstabe **T**)

Verticalis (9) = 6 (Buchstabe **F**)

9 + 5 = 14 (Buchstabe **O**)

Teilaufgabe 9

Letzlich wenn weniger 1 [–] $^{1}/_{4}$ *von einer Quadrat Zahl wird*
genommen, bleibt wider eine Quadrat Zahl. Diser
und Ersten Quadrat radix ist <*1*> [16] *gegeneinander; wann man*
aus der gefundenen Quadrat Zahl die Quadrat Wurtzl
in zween gleich theil thut theilen, weist ein theil
weniger 1 den dritten Buchstaben des fünfften Worts.
und letzlich den 2 theil mit 5 vermehret, weist das
factum den Ersten Buchstaben des 6ten *und letzten*
Worts. Frag: nach den Wunsch und wie er heissen
soll?

Diese Teilaufgabe verlangt Konjekturen, die nicht auf den ersten Blick erkennbar sind. Wir diskutieren zunächst die mathematischen Aspekte und wenden uns dann möglichen Konjekturen zu.

Im Kontext der Wortrechnung sind Quadratzahlen immer als natürliche Zahlen zu verstehen. Aus einer ersten Quadratzahl soll durch eine arithmetische Operation, in der irgendwie Viertel vorkommen (wegen des Ausdrucks *1* $^{1}/_{4}$), eine zweite kleinere (*weniger genommen*) Quadratzahl gewonnen werden. Mathematisch gelingt das ausschließlich dann, wenn die erste Quadratzahl durch 4 teilbar ist, also die Form $(2x)^2$ mit natürlichem x hat. Dann ist ihr Viertel, nämlich x^2, wieder eine Quadratzahl.[13] Die Wurzeln der Quadratzahlen sind $2x$ und x. Die folgende Angabe über eine Beziehung (*ist gegeneinander*) zwischen den beiden Wurzeln könnte grundsätzlich eine Proportion oder eine Differenz meinen. Die Proportion zwischen zwei derartigen Wurzeln ist aber unabhängig von x gleich $2x : x = 2 : 1$ und kann daher zur Ermittlung von x nicht herangezogen werden. Also muss – wenn die Aufgabe sinnvoll gestellt ist – die Differenz gemeint sein, die immer gleich $2x - x = x$ ist – die aber nicht, wie in der Aufgabenstellung angegeben, gleich 1 sein kann, was im Folgenden deutlich wird.

Die Quadratwurzel aus der eben ermittelten (*gefundenen*) zweiten Quadratzahl soll nun in zwei (*zween*) gleiche Teile geteilt werden. Damit kann eine multiplikative Zerlegung (wie in Teilaufgabe 6) oder eine additive gemeint sein. Sei t ein solcher Teil. Dann müssen laut Aufgabenstellung sowohl $t - 1$ als auch $5t$ im Buchstabenbereich von 1 bis 24 liegen, d.h. es kann $t = 2$, 3 oder 4 sein. $t = 2$ entfällt, da der Buchstabe A (aus $t - 1$) schon in Teilaufgabe 6 vorkommt und in Wortrechnungsrätseln jeder benötigte Buchstabe nur einmal codiert wird. $t = 3$ entfällt auch, da die Buchstaben B (aus $t - 1$) und P (aus $5t$) nicht zu den bisher gefundenen Teilen der Lösung des Rätsels passen. Also ergibt sich $t = 4$ mit

$$t - 1 = 3 \qquad \text{(Buchstabe } \mathbf{C}\text{)}$$

$$5t = 20 \qquad \text{(Buchstaben } \mathbf{U}, \mathbf{V}\text{)}$$

[13] $^{5}/_{4}$ (= 1 $^{1}/_{4}$) bzw. $^{3}/_{4}$ (= 1 – $^{1}/_{4}$) einer Quadratzahl können nie Quadratzahlen sein, da 5 und 3 keine Quadratzahlen sind. Die Subtraktion eines Bruches (1 $^{1}/_{4}$) liefert erst recht keine Quadratzahl.

Die Wurzel aus der zweiten Quadratzahl ist also bei additiver Zerlegung gleich $2t = 4 + 4 = 8$, die zweite Quadratzahl 64, die erste Quadratzahl $4 \cdot 64 = 256$, ihre Wurzel 16 und die Differenz der Wurzeln 8. Bei multiplikativer Zerlegung ist die Quadratwurzel gleich $t^2 = 4 \cdot 4 = 16$, die zweite Quadratzahl 256, die erste $4 \cdot 256 = 1024$, ihre Wurzel 32 und die Differenz der Wurzeln 16.

Damit ist die Teilaufgabe mathematisch soweit gelöst. Aber wie kann man nun den Ausdruck *weniger 1 $^1/_4$ von einer Quadrat Zahl wird genommen* so interpretieren, dass man zu einem Viertel der Quadratzahl kommt?

1 $^1/_4$ kann zweierlei bedeuten:

- den gemischten Bruch 1 $^1/_4$ in unserem Sinn ($^5/_4$) oder
- ‘ein Viertel’ (1 ‘ein’ und $^1/_4$ ‘Viertel’)

Nimmt man geeignet erscheinende Konjekturen an, kommen zwei Bedeutungen hinzu:

- mit Konjektur eines Minuszeichens: $1 - {}^1/_4 = {}^3/_4$ oder
- mit Konjektur des Zeichens ł: ł + $^1/_4$ = $^1/_2$ + $^1/_4$ = $^3/_4$. Die Ziffer 1 mit einem Schräg- oder Querstrich ist eine Schreibweise für $^1/_2$. Der Strich halbiert sozusagen die 1.[14]

Der Ausdruck *weniger nehmen* kann zweierlei bedeuten:

- meistens ‘wegnehmen, abziehen, subtrahieren’
- seltener auch ‘einen (kleineren) Teil nehmen’.

Damit erhält man zwei mögliche Interpretationen des gesamten Ausdrucks *weniger 1 $^1/_4$ von einer Quadrat Zahl wird genommen:*

- Mit der Konjektur eines Minuszeichens oder des Zeichens ł: Man erhält ‘von einer Quadratzahl werden $^3/_4$ dieser Quadratzahl abgezogen’. Damit landet man genau bei $^1/_4$ der Quadratzahl.
- Ohne Konjektur: Man interpretiert *1 $^1/_4$* als ‘ein Viertel’, ergänzt davor *[nemblich]* ‘nämlich’ und erhält ‘ein (kleinerer) Teil, nämlich ein Viertel, von einer Quadratzahl wird genommen’.

Zuletzt ist noch eine Konjektur für die Differenz der beiden Wurzeln zu ermitteln, die in der Aufgabenstellung mit 1 angegeben ist. Bei additiver Zerlegung der Wurzel aus der zweiten Quadratzahl ergibt sich dafür $16 - 8 = 8$, bei multiplikativer Zerlegung $32 - 16 = 16$.

[14] Arabische Ziffern mit einem Schräg- oder Querstrich wurden an der Wende vom Mittelalter zur Neuzeit für die Darstellung von ein halb (gestrichene 1 = $^1/_2$), anderthalb (gestrichene 2 = 1 $^1/_2$), dritthalb (gestrichene 3 = 2 $^1/_2$) usw. verwendet. Diese Schreibweise hat sich bei Visierern gehalten (vgl. FREY, Visierbüchlein, Av[r]), ist allerdings in den Handschriften von Wendler bisher nicht belegt.

Für die Konjekturen ist unser Favorit die Einfügung eines Minuszeichens zwischen *1* und *¹/₄* und der Ersatz von *1* durch *16* für die Differenz der beiden Wurzeln bei Annahme einer multiplikativen Zerlegung (wie in Teilaufgabe 6) der zweiten Wurzel. Konjekturen dieser Art sind typisch für handschriftliche Texte von Wendler.

Der Lösungsspruch von Wendlers erstem Prüfungsrätsel

Gott helff mir mein Sach vollenden.

Das ist sicher in folgendem Sinn zu verstehen: Gott helfe mir, meine Angelegenheit, sprich meine Rechenmeisterausbildung, erfolgreich abzuschließen.

3. Wendlers zweites Prüfungsrätsel

Das Rätsel verschlüsselt ein Wort aus vier Buchstaben.

Ich hab ein Wort, Wer dasselbe begert zu wissen
der wolle es aus hernach folgenden bericht suchen.

Teilaufgabe 1 betrifft das Fassmessen (Visieren), was Spezialwissen verlangt, Teilaufgabe 2 eine quadratische Gleichung und Teilaufgabe 3 die Fläche eines Kreissegments.

Teilaufgabe 1

Es ist ein Vaß an der tieff 1 Ruthen und 156 puncten tieff, und lang 2 Ruthen 8 läng, ist in Wechsl gefallen 10 – 4. Wenn man dessen Innhalt an Emern und Vierteln ihre zwo zahlen addirt, und von 118 abziehet weist der Rest den Ersten und letzten Buchstaben des worts.

Bei einem (liegenden) Fass bezeichnet man den Abstand vom Boden bis zum Deckel als Länge und den Abstand vom Spundloch bis zur gegenüberliegenden Wand (das ist die dickste Stelle) als Tiefe. Das Volumen eines Fasses zu bestimmen, ist wegen der bauchigen Form schwierig. Deshalb spezialisierten sich in der frühen Neuzeit gut bezahlte Eichmeister, sog. Visierer, auf diese Aufgabe und lösten sie mit teils ausgeklügelten Näherungsverfahren. Das implizite Prinzip ist, ein Fass durch einen Zylinder zu approximieren, so dass sich das Volumen als Produkt von (kreisförmiger) Grundfläche (Durchmesser zum Quadrat mal $\pi/4$) mal Höhe ergibt. Der Ausdruck *Länge* bezeichnet die Höhe und der Ausdruck *Tiefe* einen Mittelwert zwischen dem Durchmesser an der dicksten Stelle des Fasses und dem Durchmesser des Deckels/Bodens.[15]

[15] *equirte tieff* (Frey, Visierbüchlein, Bv^r); *aequirte tieff* (Wendler, Memorialbuch, 295^v, Bild 592).

Diese Idee fand ihren Niederschlag in besonderen Messinstrumenten, den sogenannten Visierruten, die an Fässern bekannten Volumens geeicht wurden. Bei einer Messung wurde eine Rute durch das Spundloch eines Fasses eingeführt und am Spundloch abgelesen. Ruten gab es in verschiedensten Ausführungen mit speziellen Skalierungen (es wurden dafür nicht die üblichen Längenmaße verwendet). Im vorliegenden Fall geht es um eine quadratische Rute (sie wurde senkrecht eingeführt), die für die Tiefe neben der äquidistanten linearen Skalierung (lineare Tiefeneinheiten, *diameter*) eine entsprechende quadratische Skalierung (quadratische Tiefeneinheiten, *punct*) mit äquidistanten Quadratzahlen trägt (s. Abb. 2).[16]

Da sich Kreisflächen immer wie die Quadrate der zugehörigen Durchmesser verhalten, entsprechen die quadratischen Tiefeneinheiten trivialerweise Flächeneinheiten. Multipliziert man sie mit der Länge des Fasses, entstehen Volumeneinheiten.[17] Bei einer angenommenen Fasslänge 1 entsprechen daher diese Flächeneinheiten selbst bereits Volumeneinheiten, in Nürnberg *Seidl*(*ein*).[18] Deshalb können Punkte und Seidl identifiziert werden.

Die Nürnberger Rute hat 16 gleiche Teile (lineare Tiefeneinheiten, *diameter*),[19] denen $16^2 = 256$ Punkte entsprechen (bei Länge 1 wäre das Volumen 256 Seidl).

In der vorliegenden Teilaufgabe ist das Fass 1 Rute 156 Punkte tief. Daher kommen – zu den 16 linearen Tiefeneinheiten einer Rute – 156 quadratische Tiefeneinheiten (Punkte), d.h. $\sqrt{156}$ lineare Tiefeneinheiten, hinzu. Das ergibt insgesamt $(16 + \sqrt{156})$ lineare Tiefeneinheiten.

Damit erhält man an quadratischen Tiefeneinheiten

$$(16 + \sqrt{156})^2 = 256 + 2 \cdot \sqrt{156} + 156 \approx 812$$

Hätte das Fass die Länge 1, wäre das Volumen 812 Seidl.

Die Längenangabe in der Aufgabenstellung kann man folgendermaßen interpretieren: Das Fass hat eine Länge von 2 Ruten, wobei die Rute 8 Längeneinheiten (*läng*) besitzt. Damit hat das Fass eine Länge von 16 Längeneinheiten, also ein Volumen von $812 \cdot 16 = 12992$ Seidl. Die Angabe zum Wechsel wird nicht benötigt.

Mit 1 Eimer = 32 Viertel und 1 Viertel = 4 Seidl gilt

$$12992 \text{ Seidl} = 3248 \text{ Viertel} = 101 \text{ Eimer } 16 \text{ Viertel}$$

Die Subtraktion der beiden Maßzahlen führt zur gesuchten Zahl

$$118 - (101 + 16) = 1 \qquad \text{(Buchstabe } \mathbf{A}\text{)}$$

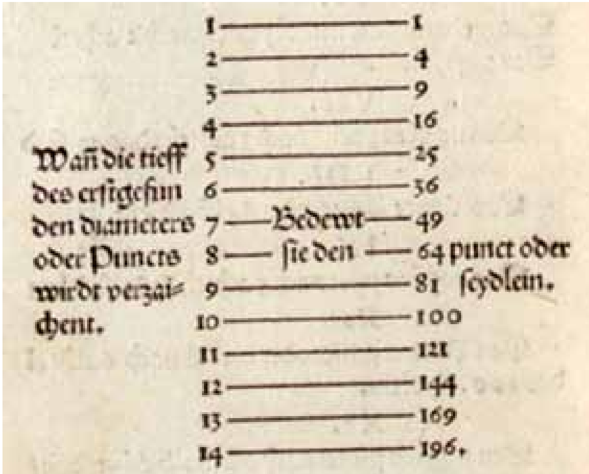
[16] Vgl. Folkerts, Visierkunst, S. 21–30.

[17] *Mach des Faß continentz alles zu seydlein* […] *die tayl ab/ durch die punct der gefunden equirten tieff* […] *so kommen* […] *leng des Faß* (Frey, Visierbüchlein, Bv[v]); *multiplicire die tieff puncten vnd leng miteinander, so findest du den Innhalt* (Wendler, Memorialbuch, 303[r], Bild 607); vgl. Leibowitz, Visierkunst, S. 10–11.

[18] Frey (Visierbüchlein) schreibt *seydlein,* Wendler (Memorialbuch) *Seidl.*

[19] *in gleiche 16 tayl* (Frey, Visierbüchlein, Aiii[r]); *theile solche deine zubereite Ruthen in 16 gleiche leng oder theil* (Wendler, Memorialbuch, 295[r], Bild 591).

Abb. 2:
Lineare und quadratische Skala einer Visierrute, hier nur bis zum *diameter* 14 ausgeführt
(FREY, Visierbüchlein, Aiiii[v])



Teilaufgabe 2

Weiter hat man eine Zahl, wenn dieselbe wird zu ihrer quadrat Zahl addirt kommen 1332. Wenn man die quadrat Zahl theilet in die gegebene Zahl, und das quotum von <49> [47] *abziehet, weist der Rest den andern Buchstaben des Worts.*

Sei x die gesuchte Zahl. Dann gilt

$$x^2 + x = 1332$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 36$ und $x_2 = -37$, wovon nur die positive relevant ist. Teilt man das Quadrat von 36 durch 36 kommt selbstverständlich wieder 36 heraus *(quotum)*. Damit lautet das Ergebnis

$$47 - 36 = 11 \qquad \text{(Buchstabe } \mathbf{L}\text{)}$$

Zur Konjektur *47* statt *49* (die Ziffer *7* konnte Wender beim Abschreiben von seiner Vorlage leicht fälschlich als *9* lesen) führen die anderen beiden Lösungsbuchstaben. Mit *49* würde man das bedeutungslose Wort *anea* erhalten, mit *47* ergibt sich ein im vorliegenden Kontext sinnvolles Lösungswort.

Teilaufgabe 3

Letzlich ist ein Circul stuck gemessen ABCD, welches weniger als ein ronden halber Circul. Hält dessen Diameter oder Seiten AB 36 Werckschuh und die Sena DC 9. Wenn man von den Planitia 221 ⁹⁄₁₄ abziehet, Restirt die Zahl des dritten Buchstaben des begerten Worts. Frag: wie dasselbe heissen soll?

Wendler schließt seinen Text mit einer Skizze (s. Abb. 3).

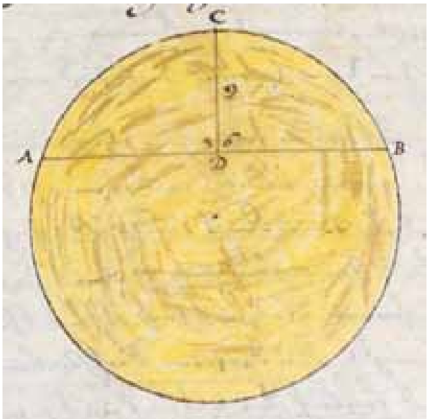


Abb. 3: Skizze zu Teilaufgabe 3
(WENDLER, Memorialbuch, 367v)

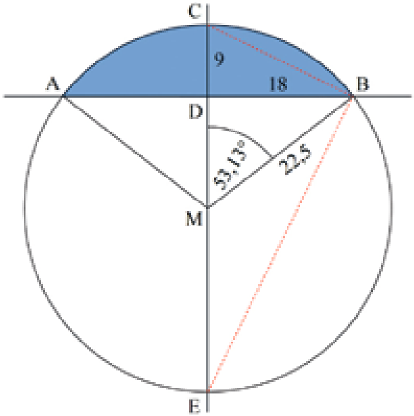


Abb. 4: Die geometrische Situation von Teilaufgabe 3

Es ist die Fläche *(planitia* oder *planities)* des Kreissegments *ABC* zu bestimmen (s. Abb. 4). Dazu berechnet man zunächst die Länge $\overline{CE}$ des Kreisdurchmessers [Längen in Werkschuh].

Der Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck ΔEBC mit der Länge $\overline{CD} = 9$ des ersten Hypotenusenabschnitts und der Länge $\overline{DB} = 18$ der Höhe liefert für die Länge $\overline{DE}$ des zweiten Hypotenusenabschnitts

$$\overline{DE} = \frac{\overline{DB}^2}{\overline{CD}} = \frac{18^2}{9} = 36$$

Der Kreisdurchmesser hat daher die Länge $\overline{CE} = \overline{CD} + \overline{DE} = 9 + 36 = 45$, der Radius hat die Länge $\overline{MC} = \overline{MB} = 22\,½$.

Weiterhin ist

$$\overline{MD} = \overline{MC} - \overline{CD} = \frac{45}{2} - 9 = \frac{27}{2}$$

Darüber hinaus braucht man noch den Winkel $\sphericalangle BMD$. Man kann ihn aus dem rechtwinkligen Dreieck ΔBDM gewinnen. Es ist

$$\sin(\sphericalangle BMD) = \frac{\overline{DB}}{\overline{MB}} = \frac{18}{22\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$$

$$\sphericalangle BMD = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) \approx \left(\frac{5260}{99}\right)^{\circ} \approx 53{,}13^{\circ}$$

Der genaue Wert $\left(\frac{5260}{99}\right)^{\circ}$ ist zurückgerechnet aus der nachfolgend bestimmten Fläche des Kreissegments *ABC,* in der der Bruch $^{9}/_{14}$ erscheinen muss, damit die Subtraktion der gegebenen Zahl 221 $^{9}/_{14}$ eine natürliche Zahl im Buchstabenbereich von 1 bis 24 liefert.

Damit kennt man alle Größen, die für die weitere Rechnung relevant sind.

Zur Bestimmung der Fläche des Kreissegments *ABC* bildet man die Differenz der Fläche der Kreissektors *AMBC* und der Fläche des Mittelpunktsdreiecks ΔAMB.

Zum Kreissektor *AMBC* gehört der Mittelpunktswinkel $\sphericalangle AMB$

$$\sphericalangle AMB = 2 \cdot \sphericalangle BMD \approx \left(\frac{10520}{99}\right)^{\circ} \approx 106{,}26^{\circ}$$

Die Fläche $\mathcal{A}$ eines Kreissektors verhält sich zur gesamten Kreisfläche wie sein Mittelpunktswinkel zu 360°. Daher gilt

$$\mathcal{A}(AMBC) \approx \frac{\overline{MC}^{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{10520}{99}\right)^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{6575}{14} = 469\frac{9}{14}$$

Für π ist der frühneuzeitliche Näherungswert $^{22}/_{7}$ eingesetzt.

Die Fläche $\mathcal{A}$ des zugehörigen Mittelpunktsdreiecks ΔAMB ist

$$\mathcal{A}(\Delta AMB) = 2\mathcal{A}(\Delta MBD) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \overline{DB} \cdot \overline{MD}\right) = 18 \cdot \frac{27}{2} = 243$$

Die Fläche $\mathcal{A}$ eines Kreissegments ist die Differenz der Fläche des zugehörigen Kreissektors und der Fläche des zugehörigen Mittelpunktsdreiecks. Daher gilt

$$\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(AMBC) - \mathcal{A}(\Delta AMB) \approx 469\frac{9}{14} - 243 = 226\frac{9}{14}$$

Die Fläche des Kreissegments *ABC* führt zur gesuchten Zahl

226 $^{9}/_{14}$ – 221 $^{9}/_{14}$ = 5 (Buchstabe **E**)

Das Lösungswort von Wendlers zweitem Prüfungsrätsel

Alea

Die lateinischen Grundbedeutungen dieses Wortes bewegen sich um den Spielwürfel und das Glücksspiel. Im übertragenen Sinne wird es schon im klassischen Latein für die Chancen und Risiken bei Entscheidungen mit ungewissem Ausgang benutzt. Alea kommt außerdem als Beiname von Athene/Minerva vor, der Schutzgöttin von Weisheit und Wissenschaft. Damit ergibt sich ein Spektrum an passenden Deutungen, die der Prüfling an dieser Stelle in eine offene Zukunft mitnehmen kann. Naheliegend ist der Wunsch für ein glückliches Händchen beim Berufseinstieg, der Wendler 1647 in Regensburg erfolgreich gelang.

Literaturverzeichnis

Quellen

Girolamo CARDANO, Artis magnae, sive de regulis algebraicis, liber unus. Nürnberg: Johann Petreius 1545.

Johann FREY, Ein new Visierbüchlein, Nürnberg: Johann Stüchs 1531 (BSB, Math.p. 156).

Johann HEER, Arithmeticae et geometricae quaestiones Für die Jenigen/ so sich ins Examen, vnd folgents zu dem Teutschen Schulstandt zu begeben gesinnt, Nürnberg: Caspar Fuld 1616 (SLUB Dresden).

Sebastian KURZ, Resolutio. Das ist: Aufflösung vieler schöner/ kunstreicher/ Cossischer vnnd Polygonalischer Exempla etlicher fürnemer vnnd berühmbter Rechenmeister/ so zu end jhrer Rechenbücher theils ohne Facit gesetzt, Nürnberg: Johann Lantzenberger 1604 (BSB, Res/4 Diss. 2646#Beibd. 4).

Georg WENDLER, Arithmetica practica, Regensburg: Christoph Fischer 1667 (SBR, Philos. 1334 [mit Frontispiz], Philos. 978 [ohne Frontispiz]); inhaltlich unveränderter Neudruck Regensburg: Johann Zacharias Seidel 1698 (UB Leipzig).

Georg WENDLER, Analysis vel resolutio, [Nürnberg, Regensburg ca. 1645–1650] (BSB, Cgm 3789).

Georg WENDLER, Memorialbuch [Titel lt. fol. 2^{v}], [Nürnberg, Regensburg ca. 1645–1650] (BSB, Cgm 3788).

Sekundärliteratur

Menso FOLKERTS, Die Ausbildung von Rechenmeistern, dargestellt an ausgewählten Beispielen, in: Jürgen KIEFER – Karin REICH (Hg.), Gemeinnützige Mathematik. Adam Ries und seine Folgen (= Acta Acad. Scientiarum 8), Erfurt 2003, S. 89–129.

Menso FOLKERTS, Die Entwicklung und Bedeutung der Visierkunst als Beispiel der praktischen Mathematik der frühen Neuzeit (= Humanismus und Technik Bd. 18, Heft 1), Berlin 1974.

Menso FOLKERTS – Martin HELLMANN, Peter von Jülich, De modo mensurandi vasa. Ein Traktat zur Fassmessung aus dem frühen 15. Jahrhundert (= Algorismus 85), Augsburg 2018.

Rainer GEBHARDT, Das Rechenbuch der Freiberger Rechenmeister Oswald Ulman und Caspar Thierfelder von 1564, in: Rainer GEBHARDT (Hg.), Rechenkunst und Mathematik in der frühen Neuzeit (= Schriften des Adam-Ries-Bundes 31), Annaberg-Buchholz 2023, S. 103–128.

Rudolf HALLER, Anton Neudörffers Rätsel gelöst mit Hilfe von Sebastian Kurz und Johann Conrad Redlich, in: Rainer GEBHARDT (Hg.), Visier- und Rechenbücher der frühen Neuzeit (= Schriften des Adam-Ries-Bundes 19), Annaberg-Buchholz 2008, S. 265–274.

Rudolf HALLER – Alfred HOLL, Zwei Rätsel aus Anton Neudörffers Grosser Arithmetic, in: Rainer GEBHARDT (Hg.), Rechenmeister und Mathematiker der frühen Neuzeit (= Schriften des Adam-Ries-Bundes 25), Annaberg-Buchholz 2017, S. 91–102.

Rudolf HALLER – Alfred HOLL, Simon Jacobs Briefsammlung, Briefe von Johann Neudörffer und anderen Rechenmeistern mit postumen Ergänzungen und kalligraphischen Übungen, Gießen UB Hs. 156 (= Rechenmeister 5), Annaberg-Buchholz 2023.

Rudolf Haller – Alfred Holl – Yvonne Stry – Alexander Gross, Anton Neudörffer (Nürnberg 1571–1628 Regensburg) und seine *Grosse Arithmetic* (= Regensburger Studien zur Literatur und Kultur des Mittelalters 5), Berlin 2020.

Alfred Holl – Yvonne Stry, Das 14-teilige Wortrechnungsrätsel des Regensburger Rechenmeisters Georg Wendler von 1667, in: VHVO 163 (2023) S. 243–264.

Grete Leibowitz, Die Visierkunst im Mittelalter (Inaugural-Dissertation), Heidelberg 1933.

Yvonne Stry, Kandlers Zahlenrätsel und Wendlers Lösung, in: Edith Feistner – Alfred Holl (Hg.), Erzählen und Rechnen in der frühen Neuzeit. Interdisziplinäre Blicke auf Regensburger Rechenbücher (= Regensburger Studien zur Literatur und Kultur des Mittelalters 1), Berlin 2016, S. 375–396.

Johannes Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik. Bd. 1: Arithmetik und Algebra. 4. Aufl. Vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich und Helmut Gericke. Berlin, New York 1980.